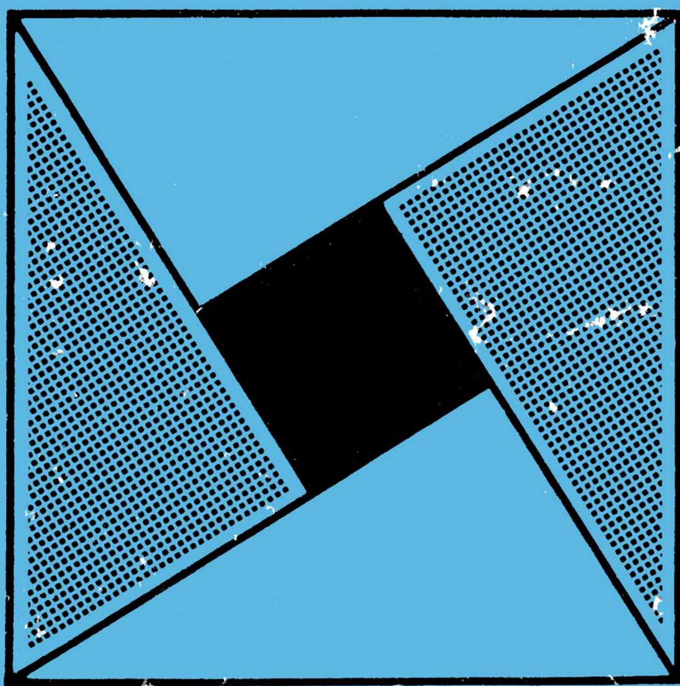
GEOMETRIJA



7-9



GEOMETRIJA

VADOVĖLIS VII – IX KLASEI



KAUNAS „ŠVIESA“ 1996

ГЕОМЕТРИЯ
Учебник для 7—9 классов средней школы
Авторы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина
Москва, «Просвещение», 1990
ISBN

Autoriai: **L. Atanasianas, V. Butuzovas, S. Kadomcevas, E. Pozniakas, I. Judina**

Iš rusų kalbos vertė Petras Vaškas

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos priimta vartoti mokyklose

4-asis leidimas

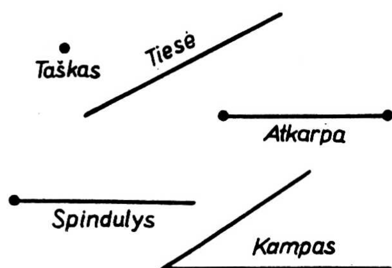
ISBN 5-430-02100-8

BRANGŪS SEPTINTOKAI!

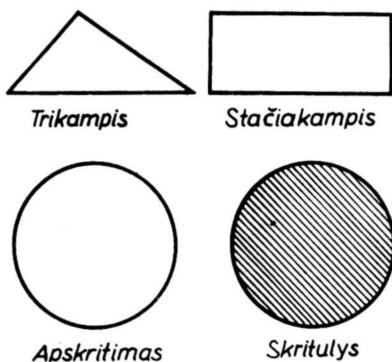
Jūs pradedate mokytis naujo dalyko — geometrijos. Jos mokysitės šešerius metus. Kas yra geometrija?

Geometrija atsirado labai seniai. Tai viena seniausių mokslo šakų. Graikiškos kilmės žodis „geometrija" reiškia „žemės matavimą" (gr. geōmetrija — žemės matavimas). Mat geometrijos pradmenys susiję su įvairiais matavimais, kuriuos tekdavo atlikti ženklinant žemės sklypus, tiesiant kelius, statant namus ir kitus statinius. Taip atsirado ir buvo kaupiamos įvairios geometrinių matavimų ir brėžimų taisyklės. Taigi geometrija atsirado kaip žmonių praktinės veiklos rezultatas. Iš pradžių ji ir buvo taikoma tik sprendžiant praktinius uždavinius. Vėliau geometrija tapo savarankiška mokslo šaka, nagrinėjanti geometrinių figūrų savybes.

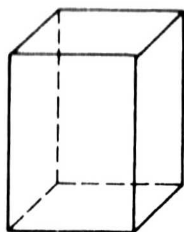
Per matematikos pamokas jau susipažinote su kai kuriomis geometrinėmis figūromis. Įsivaizduojate tašką, tiesę, atkarpą, spindulį, kampą (1 pav.), galimas jų tarpusavio padėtis. Žinote ir tokias figūras: trikampį, stačiakampį, skritulį ir kt. (2 pav.). Liniuote su milimetrinėmis padalomis mokate matuoti atkarpas, o matlankiu — kampus. Tačiau visa tai yra tik pačios pirmosios geometrijos žinios. Dabar tas žinias jums teks plėsti ir gilinti. Susipažinsite su naujomis figūromis, sužinosite jums jau žinomų figūrų daug svarbių ir įdomių savybių. Pamatysite, kaip geomet-



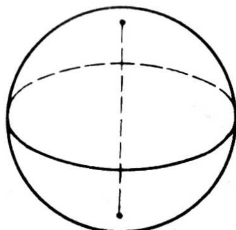
1 pav.



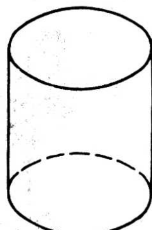
2 pav.



Stačiakampis gretasienis



Rutulys



Ritinys

3 pav.

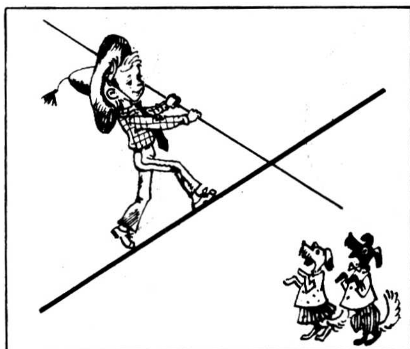
rinių figūrų savybės pritaikomos praktikoje. Tai padaryti padės vadovėlis ir, aišku, mokytojas.

Mokyklinis geometrijos kursas dalijamas į *planimètriją* ir *stereomètriją*. Planimetrija tiria plokščiųjų figūrų (pavyzdžiui, atkarpų, trikampių, keturkampių) savybes, stereometrija — erdvinių figūrų (pavyzdžiui, gretasienio, rutulio, ritinio; 3 pav.) savybes. Mokytis geometrijos pradėsime nuo planimetrijos.

Mokantis geometrijos, teks įrodinėti teoremas ir spręsti uždavinius. Kas yra „teorema" ir ką reiškia „įrodyti teoremą", jūs greit sužinosite. O kas yra uždavinys — jau žinote, nes per matematikos pamokas sprendėte įvairius uždavinius.

Šiame geometrijos vadovėlyje daug uždavinių. Tai kiekvieno paragrafo uždaviniai ir praktikos darbai, kiekvieno skyriaus papildomi uždaviniai ir dar sunkesni uždaviniai. Paragrafo uždaviniai laikomi pagrindiniais. Sunkesni uždaviniai pažymėti žvaigždute. Knygos gale pateikti atsakymai ir nurodymai. Visiems, kas susidomės geometrija, kam patiks spręsti uždavinius ir įrodinėti teoremas, patariame spręsti ne tik privalomus, bet ir žvaigždute pažymėtus, papildomus bei sunkesnius uždavinius. Tokius uždavinius spręsti nėra paprasta, tačiau įdomu. Gal ir ne visada pavyks iš karto išspręsti. Nenusiminkite, padės kantrybė ir užsispyrimas. Išspręstas sunkus uždavinys bus atpildas už tai. Nebijokite žvilgterėti į priekį, skaityti tuos paragrafus, kurių dar nesimokėte klasėje. Klauskite mokytojo, draugų, tėvų.

Sėkmės jums, mergaitės ir berniukai!



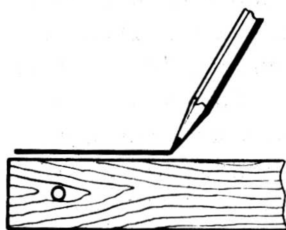
I skyrius

GEOMETRIJOS PRADINĖS ŽINIOS

§ 1. TIESĖ IR ATKARPA

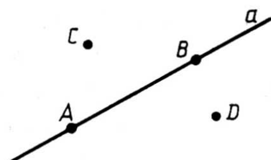
1. Taškai, tiesės, atkarpos. Prisiminkime, ką žinote apie taškus ir tieses. Žinome, kad tiesės brėžiamos su liniuote (4 pav.). Tačiau šitaip galima pavaizduoti tik tiesės dalį. Įsivaizduojame, kad visa tiesė neribotai tęsiasi į abi puses. Tiesės dažniausiai žymimos mažosiomis raidėmis, taškai — didžiosiomis. 5 paveiksle pavaizduota tiesė a bei taškai A, B, C ir D. Taškai A ir B yra tiesėje a, o taškai C ir D nėra toje tiesėje. Galima sakyti, kad tiesė a eina per taškus A ir B, bet neina per taškus C ir D. Pabrėžiame, kad per taškus A ir B negalima nubrėžti kitos tiesės (nesutampančios su tiese a). Apskritai *per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti tiesę, tačiau tik vieną*[1].

Dabar išnagrinėkime dvi tieses. Jei jos turi bendrą tašką, tai sakoma, kad tos tiesės *susikerta*. 6 paveiksle tiesės a ir b susi-



Tiesės vaizdavimas brėžinyje

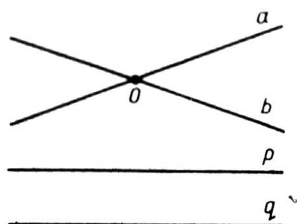
4 pav.



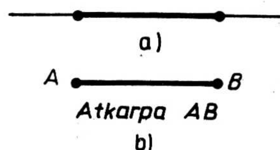
Tiesė ir taškai

5 pav.

[1] Čia ir toliau, sakydami „du taškai", „trys taškai", „dvi tiesės" ir t. t., laikysime, kad tie taškai bei tiesės yra skirtingi.



6 pav.



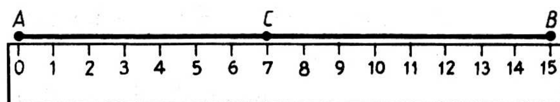
7 pav.

kerta taške O, o tiesės p ir q nesusikerta. Dvi tiesės negali turėti dviejų ir daugiau bendrų taškų. Jei dvi tiesės turėtų du bendrus taškus, tai kiekviena jų eitų per tuos taškus. Tačiau per du taškus eina tik viena tiesė. Taigi galime padaryti šitokią išvadą: *dvi tiesės arba turi tik vieną bendrą tašką, arba neturi bendrų taškų.*

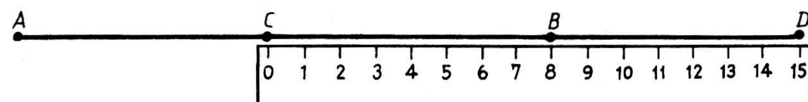
Tiesė, kurioje pažymėti du taškai, pavyzdžiui, A ir B, kartais įvardijama dviem raidėmis: AB arba BA. Kad būtų trumpiau, vietoj žodžių „taškas A yra tiesėje a“ rašoma $A \in a$, o vietoj žodžių „taškas B nėra tiesėje a“ — $B \notin a$.

7 paveiksle, a, išryškinta tiesės dalis, kurią riboja du taškai. Tokia tiesės dalis vadinama *ãtkarpa.* Atkarpą ribojantys taškai vadinami jos *galaĩs.* 7 paveiksle, b, pavaizduota atkarpa, kurios galai A ir B. Tokia atkarpa žymima AB arba BA. Atkarpai AB priklauso taškai A ir B bei visi tiesės AB taškai, esantys tarp A ir B.

2. Gairiavimas. Išspręsime šitokį uždavinį: naudojantis liniuote reikia nubrėžti atkarpą, ilgesnę už pačią liniuotę. Tam liniuotę padėkime ant popieriaus lapo, palei jos kraštą pažymėkime taškus A ir B bei kurį nors tarp jų esantį tašką C (8 pav., a). Po to liniuotę pastumkime į dešinę tiek, kad jos kairysis galas atsi-

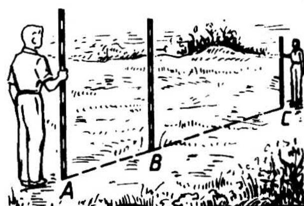


a)



8 pav. b)

durtų ties tašku *C*. Ties dešiniuoju liniuotės galu pažymėkime tašką *D* (8 pav., *b*). Taškai *A*, *B*, *C* ir *D* yra vienoje tiesėje. Jei nubrėšime atkarpą *AB*, po to atkarpą *BD*, tai gausime atkarpą *AD*, kuri ilgesnė už liniuotę.



9 pav.

Panašiai daroma „vedant" ilgas tiesių atkarpas vietovėje. Esmė šitokia. Pirmiausia pažymimi kurie nors taškai *A* ir *B*. Tam panaudojamos dvi gairės — apie 2 m ilgio kartys. Kad būtų galima kartis įsmeigti į žemę, jų vienas galas nusmailinamas. Trečios gairės vieta parenkama taip, kad taške *A* esančiam stebėtojui ją užstotų taškuose *A* ir *B* įsmeigtos gairės (taškas *C*; 9 pav.). Ketvirtąją gairę turi uždengti taškuose *B* ir *C* įsmeigtos gairės ir t. t. Aišku, jog taip galima paženklinti kiek norima ilgą tiesės atkarpą.

Aprašytasis būdas vadinamas *gairiãvimu*. Jis plačiai taikomas praktikoje, pavyzdžiui, kertant proskynas, tiesiant plentus arba geležinkelius, aukštos įtampos elektros perdavimo linijas ir t. t.

Praktikos darbai

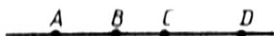
1. Nubrėžkite tiesę, ją pažymėkite raide *a*. Pažymėkite taškus *A* ir *B*, esančius toje tiesėje, bei taškus *P*, *Q* ir *R*, nesančius joje. Taškų *A*, *B*, *P*, *Q*, *R* ir tiesės *a* tarpusavio padėtį aprašykite vartodami ženklus $\in$ ir $\notin$.

2. Pažymėkite taškus *A*, *B* ir *C*, nesančius vienoje tiesėje, ir nubrėžkite tieses *AB*, *BC* ir *CA*.

3. Nubrėžkite tokias tris tieses, kurių kiekvienos dvi susikerta. Pažymėkite visus tų tiesių susikirtimo taškus. Kiek taškų gavote? Išnagrinėkite visus galimus atvejus.

4. Taškus *A*, *B*, *C*, *D* pažymėkite taip, kad taškai *A*, *B*, *C* būtų vienoje tiesėje, o taškas *D* nebūtų joje. Per kiekvienus du taškus nubrėžkite tiesę. Kiek tiesių gavote?

5. Nubrėžkite tiesę *a*, joje pažymėkite taškus *A* ir *B*. Pažymėkite: a) taškus *M* ir *N*, esančius atkarpoje *AB*; b) taškus *P* ir *Q*, esančius tiesėje *a*, bet nesančius atkarpoje *AB*; c) taškus *R* ir *S*, nesančius tiesėje *a*.



10 pav.

6. Nubrėžkite tiesę ir joje pažymėkite tris taškus. Kiek atkarpų toje tiesėje gavote?

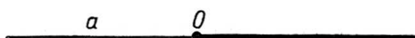
7. 10 paveiksle pavaizduota tiesė, joje pažymėti taškai A, B, C ir D. Išvardykite visas atkarpas: a) kuriose yra taškas C; b) kuriose nėra taško B.

§ 2. SPINDULYS IR KAMPAS

3. Spindulys. Nubrėžkime tiesę a ir pažymėkime jos tašką O (11 pav.). Tas taškas tiesę dalija į dvi dalis, kurių kiekviena vadinama *spinduliu, išeinančiu iš taško* O (11 paveiksle vienas iš spindulių paryškintas). Taškas O vadinamas kiekvieno tų spindulių *pradžià*. Spindulys žymimas arba mažąja raide (pavyzdžiui, 12 paveikslo, *a*, spindulys h), arba dviem didžiosiomis raidėmis; tada pirmoji raidė parodo spindulio pradžią, antroji — kurį nors spindulio tašką (pavyzdžiui, 12 paveikslo, *b*, spindulys OA).

4. Kampas. Prisiminsime, kad *kam̃pas — geometrinė figūra, kurią sudaro taškas ir du iš jo išeinantys spinduliai.* Spinduliai vadinami *kam̃po kraštìnėmis,* o jų bendra pradžia — *kam̃po viršū̃nė.* 13 paveiksle pavaizduotas kampas, kurio viršūnė O, o kraštinės h ir k. Kampo kraštinėse pažymėti taškai A ir B. Tas kampas žymimas šitaip: $\angle hk$ arba $\angle AOB$, arba $\angle O$.

Kampas, kurio abi kraštinės yra vienoje tiesėje, vadinamas *ištiestiniù.* Galima sakyti, kad kiekviena ištiestinio kampo kraštinė yra kitos kraštinės tęsinys. 14 paveiksle pavaizduotas ištiestinis kampas, kurio viršūnė C, o kraštinės p ir q.



Taškas O tiesę dalija į du spindulius

11 pav.



Spindulys h

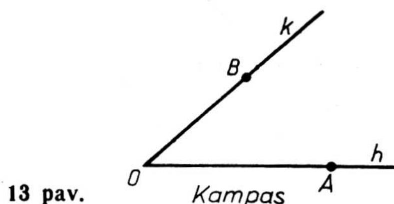
a)



Spindulys OA

b)

12 pav.



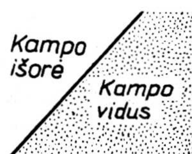
Kampas

13 pav.

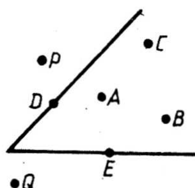


Ištiestinis kampas

14 pav.



a)



b)

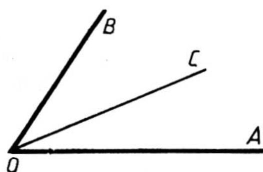
15 pav.

Kiekvienas kampas plokštumą dalija į dvi dalis. Jei kampas neištiestinis, tai viena dalis vadinama kampo *vidumi*, o kita — *išore* (15 pav., *a*). 15 paveiksle, *b*, pavaizduotas neištiestinis kampas. Taškai *A*, *B*, *C* yra to kampo viduje, taškai *D* ir *E* — kampo kraštinėse, o taškai *P* ir *Q* — kampo išorėje. Jei kampas ištiestinis, tai kiekvieną iš dalių, į kurias jis dalija plokštumą, galima laikyti kampo vidumi. Figūra, kurią sudaro kampas ir jo vidus, irgi vadinama kampu.

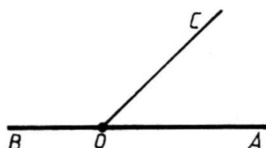
Jei spindulys išeina iš neištiestinio kampo viršūnės ir yra kampo viduje, tai jis dalija tą kampą į du kampus. 16 paveiksle, *a*, spindulys *OC* kampą *AOB* dalija į du kampus: *AOC* ir *COB*. Jei kampas *AOB* ištiestinis, tai kiekvienas spindulys *OC*, nesutampantis su spinduliais *OA* ir *OB*, tą kampą dalija į du kampus: *AOC* ir *COB* (16 pav., *b*).

Praktikos darbai ir klausimai

8. Nubrėžkite tiesę, joje pažymėkite taškus *A* ir *B*, o atkarpoje *AB* — tašką *C*.
   a) Kurie iš spindulių *AB*, *BC*, *CA*, *AC* sudaro sutampančių spindulių poras?
   b) Pasakykite, kuris spindulys yra spindulio *CA* tęsinys.



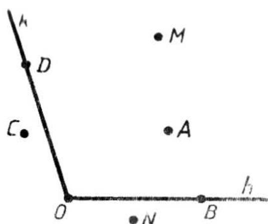
a)



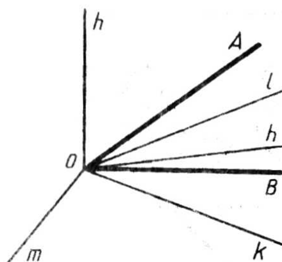
b)

Spindulys OC kampą AOB dalija į du kampus: ∠AOC ir ∠COB

16 pav.



17 pav.



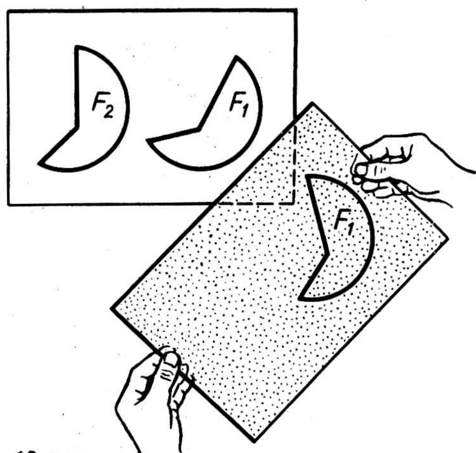
18 pav.

9. Nubraižykite tris neištiestinius kampus ir juos pažymėkite šitaip: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.
10. Nubrėžkite du ištiestinius kampus ir juos pažymėkite raidėmis.
11. Nubrėžkite spindulius h, k ir l, turinčius bendrą pradžią. Išvardykite visus tų spindulių sudarytus kampus.
12. Nubraižykite neištiestinį kampą hk. Pažymėkite du to kampo vidaus taškus, du to kampo išorės taškus ir du taškus kampo kraštinėse.
13. Nubraižykite neištiestinį kampą. Pažymėkite taškus A, B, M ir N taip, kad visi atkarpos AB taškai būtų kampo viduje, o visi atkarpos MN taškai — kampo išorėje.
14. Nubraižykite neištiestinį kampą AOB ir: a) spindulį OC, kuris kampą AOB dalytų į du kampus; b) spindulį OD, kuris kampo AOC nedalytų į du kampus.
15. Kiek neištiestinių kampų gauname susikirtus dviem tiesėms?
16. Kurie iš 17 paveiksle pavaizduotų taškų yra kampo hk viduje ir kurie — išorėje?
17. Kurie iš 18 paveiksle pavaizduotų spindulių kampą AOB dalija į du kampus?

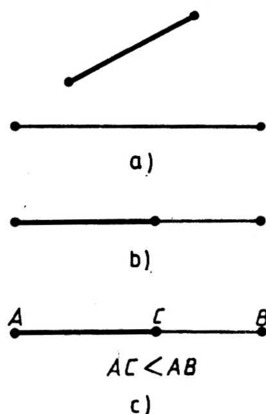
§ 3. ATKARPŲ IR KAMPŲ PALYGINIMAS

5. Geometrinių figūrų lygumas. Kai kurie mūsų aplinkos daiktai yra vienodos formos ir vienodų matmenų. Tai, pavyzdžiui, du vienodi popieriaus lapai, dvi vienodos knygos, du vienodi automobiliai. Geometrijoje dvi figūros, turinčios vienodą formą ir vienodus matmenis, vadinamos lygiomis.

19 paveiksle pavaizduotos figūros F_1 ir F_2. Norėdami įsitikinti, ar jos tikrai lygios, darykime šitaip. Nukopijuokime figūrą



19 pav.



20 pav.

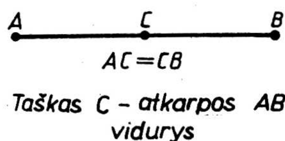
F_1 perkeldami ją ant kalkės. Stumdami kalkę ir viena ar kita puse ją dėdami ant figūros F_2, bandykime figūros F_1 kopiją sutapdinti su figūra F_2. Jei jos sutaps, tai figūra F_1 lygi figūrai F_2.

Galima įsivaizduoti, kad ant figūros F_2 uždedama ne figūros F_1 kopija, bet pati figūra F_1. Todėl toliau kalbėsime apie pačios figūros (o ne jos kopijos) uždėjimą ant kitos figūros. Taigi *dvi geometrinės figūros, kurias galima sutapdinti uždedant vieną ant kitos, vadinamos lygiomis.*

6. Atkarpų ir kampų palyginimas. 20 paveiksle, *a*, pavaizduotos dvi atkarpos. Norėdami įsitikinti, ar jos lygios, ar ne, vieną atkarpą uždėkime ant kitos taip, kad vienos atkarpos galas sutaptų su kitos galu (20 pav. *b*). Jei sutaps ir kiti du atkarpų galai, tai sutaps ir atkarpos, taigi jos lygios. Jei kiti du galai nesutaps, tai mažesne laikoma ta atkarpa, kuri yra kitos atkarpos dalis. 20 paveiksle, *c*, atkarpa *AC* yra atkarpos *AB* dalis, todėl atkarpa *AC* mažesnė už atkarpą *AB* (rašoma šitaip: $AC<AB$).

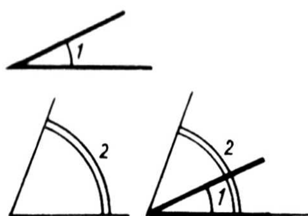
Atkarpos taškas, dalijantis ją pusiau, t. y. į dvi lygias atkarpas, *vadinamas atkarpõs vìduriu.* 21 paveiksle taškas *C* — atkarpos *AB* vidurys.

22 paveiksle, *a*, pavaizduoti neištiestiniai kampai *1* ir *2*. Norėdami įsitikinti, ar jie lygūs, vieną kampą ant kito uždėkime taip, kad vieno kampo kraštinė sutaptų su kito kampo kraštine, o kitos dvi kraštinės būtų vienoje sutapusių kraštinių

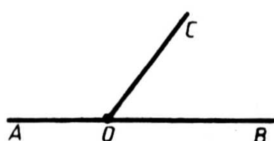


Taškas C – atkarpos AB vidurys

21 pav.



22 pav.



Neištiestinis kampas COB yra ištiestinio kampo AOB dalis

23 pav.

pusėje (22 pav., *b*). Jei kitos dvi kraštinės irgi sutaps, tai kampai sutaps, vadinasi, jie lygūs. Jei tos kraštinės nesutaps, tai mažesniu laikomas tas kampas, kuris yra kito kampo dalis. 22 paveiksle, *b*, kampas *1* yra kampo *2* dalis, todėl $\angle 1 < \angle 2$.

Neištiestinis kampas yra ištiestinio kampo dalis (23 pav.), todėl ištiestinis kampas didesnis už neištiestinį. Aišku, kad bet kurie du ištiestiniai kampai lygūs.

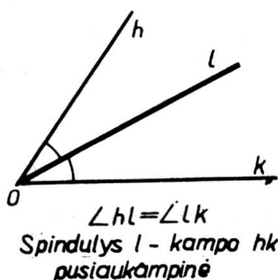
Spindulys, išeinantis iš kampo viršūnės ir dalijantis jį į du lygius kampus, vadinamas kampo pusiaukampine. 24 paveiksle spindulys *l* — kampo *hk* pusiaukampinė.

Klausimai ir uždaviniai

18. Spindulyje, kurio pradžia *O*, pažymėti taškai *A*, *B* ir *C*. Taškas *B* yra tarp taškų *O* ir *A*, o taškas *A* — tarp taškų *O* ir *C*. Palyginkite atkarpas *OB* ir *OA*, *OC* ir *OA*, *OB* ir *OC*.

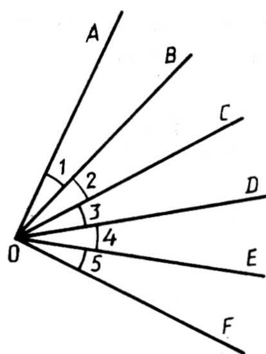
19. Taškas *O* yra atkarpos *AB* vidurys. Ar galima sutapdinti uždedant atkarpas: a) *OA* ir *OB*; b) *OA* ir *AB*?

20. 25 paveiksle atkarpos *AB*, *BC*, *CD* ir *DE* lygios. Nurodykite:

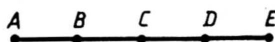


$\angle hl = \angle lk$
Spindulys l - kampo hk pusiaukampinė

24 pav.



26 pav.



25 pav.

a) atkarpų AC, AE ir CE vidurio taškus; b) atkarpą, kurios vidurys yra taškas D; c) atkarpas, kurių vidurys yra taškas C.

21. Spindulys OC kampą AOB dalija į du kampus. Palyginkite kampus AOB ir AOC.

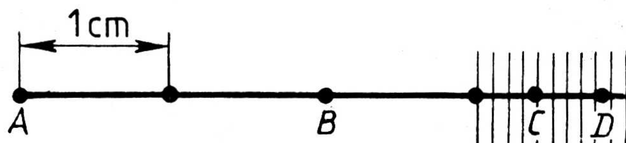
22. Spindulys l — kampo hk pusiaukampinė. Ar galima sutapdinti uždedant kampus: a) hl ir lk; b) hl ir hk?

23. 26 paveiksle skaičiais pažymėti kampai lygūs. Nurodykite: a) kiekvieno iš kampų AOC, BOF, AOE pusiaukampinę; b) visus kampus, kurių pusiaukampinė yra spindulys OC.

§ 4. ATKARPŲ MATAVIMAS

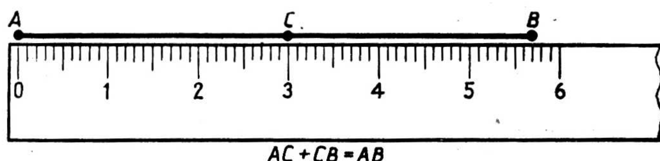
7. Atkarpos ilgis. Praktikoje dažnai tenka matuoti atkarpas, t. y. rasti jų ilgius. Atkarpų matavimas pagrįstas jų palyginimu su kuria nors atkarpa, kuri laikoma *matãvimo víenetu*. Jei, pavyzdžiui, matavimo vienetu pasirinktas centimetras, tai norint rasti atkarpos ilgį sužinoma, kiek kartų toje atkarpoje išsitenka centimetras. 27 paveikslo atkarpoje AB centimetras išsitenka lygiai du kartus [1]. Tai reiškia, kad atkarpos AB ilgis lygus 2 cm. Paprastai sakoma trumpiau: „Atkarpa AB lygi 2 cm" ir rašoma šitaip: $AB=2$ cm.

Kai ilgio vienetas matuojamoje atkarpoje sveiką skaičių kartų neišsitenka, lieka liekana. Tada ilgio vienetas dalijamas į lygias dalis (dažniausiai į 10 lygių dalių) ir ieškoma, kiek kartų viena tokia dalis išsitenka liekanoje. Pavyzdžiui, 27 paveikslo atkarpoje AC centimetras išsitenka 3 kartus, o liekanoje lygiai 4 kartus išsitenka viena dešimtoji centimetro dalis (milimetras), todėl atkarpos AC ilgis lygus 3,4 cm. Tačiau gali būti, kad ir pasirinkta matavimo vieneto dalis (šiuo atveju milimetras) liekanoje neišsitenka sveikąjį skaičių kartų ir gaunama nauja liekana. Pa-



27 pav.

[1] Šis paveikslas nubraižytas masteliu 2 : 1.



28 pav.

vyzdžiui, 27 paveikslo atkarpoje *AD* centimetras išsitenka 3 kartus ir lieka liekana, o liekanoje milimetras išsitenka 8 kartus ir dar lieka liekana. Tokiu atveju sakoma, kad atkarpos *AD* ilgis apytiksliai lygus 3,8 cm. Norint tą atkarpą išmatuoti tiksliau, tą matavimo vieneto dalį (milimetrą) galima padalyti į 10 lygių dalių ir matuoti toliau. Mintyse tai galima tęsti ir toliau, atkarpos ilgį matuojant vis didesniu tikslumu. Praktiškai tenkinamasi atkarpų ilgių apytikslėmis reikšmėmis.

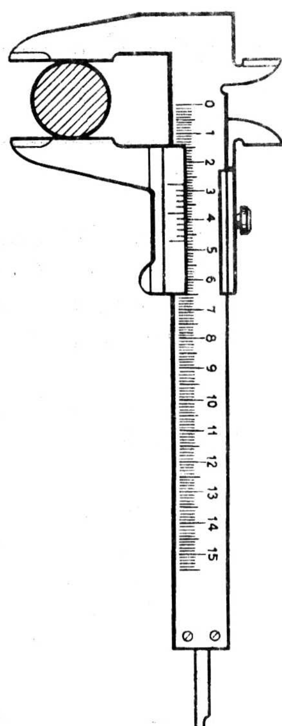
Atkarpų matavimo vienetu galima laikyti ne tik centimetrą, bet ir kiekvieną kitą atkarpą. *Pasirinkus matavimo vienetą, galima išmatuoti kiekvieną atkarpą, t. y. jos ilgį išreikšti tam tikru teigiamuoju skaičiumi.* Tas skaičius rodo, kiek kartų matavimo vienetas ir jo dalys išsitenka matuojamoje atkarpoje.

Jei dvi atkarpos lygios, tai matavimo vienetas ir jo dalys tose atkarpose išsitenka po vienodą skaičių kartų, t. y. *lygių atkarpų ilgiai lygūs.* Jei viena atkarpa mažesnė už kitą, tai matavimo vienetas (arba jo dalis) pirmoje atkarpoje išsitenka mažesnį skaičių kartų negu antrojoje, t. y. *mažesnės atkarpos ilgis yra mažesnis.*

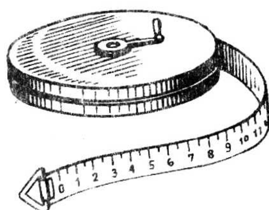
28 paveiksle pavaizduota atkarpa *AB*. Taškas *C* ją dalija į dvi atkarpas: *AC* ir *CB*. Matome, kad $AC=3$ cm, $CB=2{,}7$ cm, $AB=5{,}7$ cm. Taigi $AC+CB=AB$. Aišku, kad ir visais kitais atvejais, *kai taškas atkarpą dalija į dvi atkarpas, visos atkarpos ilgis lygus tų dviejų atkarpų ilgių sumai.*

Atkarpos ilgis dar vadinamas *atstumù* tarp tos atkarpos galų.

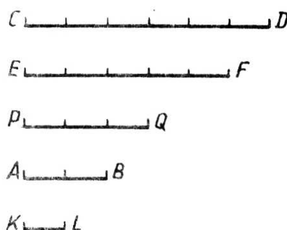
8. Matavimo vienetai. Matavimo prietaisai. Atkarpoms matuoti ir atstumams rasti praktiškai vartojami įvairūs matavimo vienetai. Standartiniu tarptautiniu atkarpų matavimo vienetu parinktas *metras* — atkarpa, kuri apytiksliai lygi $\frac{1}{40\,000\,000}$ Žemės dienovidinio daliai. Metro etalonas — specialus metalinis strypelis — saugomas Tarptautiniame matų ir svorių biure Prancūzijoje. Etalono kopijas saugoja ir kitos valstybės. Viename metre yra šimtas centimetrų. Viename centimetre yra dešimt milimetrų.



29 pav. Slankmatis



Rulete 30 pav.



31 pav.

Matuojant nedidelius atstumus, pavyzdžiui, tarp popieriaus lape pažymėtų taškų, matavimo vienetu laikomas centimetras arba milimetras. Atstumas tarp kambaryje esančių daiktų matuojamas metrais, atstumas tarp gyvenviečių — *kilomètrais*. Vartojami ir kiti matavimo vienetai, pavyzdžiui, *decimètras, jūrmylė* (1 mylia lygi 1,852 km). Atsronomijoje matavimo vienetu laikomas *šviesmetis*, t. y. kelias, kurį šviesa nueina per vienerius metus.

Čia išvardijome dabar praktikoje vartojamus atstumo matavimo vienetus. Senovėje įvairios šalys turėjo savus matavimo vienetus. Pavyzdžiui, Rusijoje buvo vartojamas aršinas (0,7112 m), sieksnis (2,1336 m) ir kt., Lietuvoje — colis (25,4 mm), rykštė (4,32 m), varstas (1,0668 km), virvė (44,6 m) ir kt.

Praktikoje atstumams matuoti naudojami įvairūs prietaisai. Pavyzdžiui, techninėje braižyboje naudojama *mastelinė milimetrinė liniuotė*. Vamzdelio skersmuo matuojamas *slañkmačiu*

(29 pav.). Juo atstumus galima matuoti 0,1 mm tikslumu. Atstumams vietovėje matuoti naudojama *rulėtė* — juosta su padalomis (30 pav.).

Praktikos darbai

24. Išmatuokite geometrijos vadovėlio plotį ir ilgį, juos išreikškite centimetrais ir milimetrais.
25. Išmatavę geometrijos vadovėlio (be viršelio) storį, raskite vieno lapo storį.
26. Raskite visų 31 paveiksle pavaizduotų atkarpų ilgius, kai matavimo vienetu laikoma atkarpa: a) KL; b) AB.
27. Nubrėžkite atkarpą AB ir spindulį h. Pasinaudodami masteline liniuote spindulyje h nuo jo pradžios atidėkite atkarpas, kurių ilgiai lygūs $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ ir $\frac{1}{4}AB$.
28. Nubrėžkite tiesę, joje pažymėkite taškus A ir B. Panaudodami mastelinę liniuotę pažymėkite taškus C ir D tose vietose, kad taškas B būtų atkarpos AC vidurys, o taškas D — atkarpos BC vidurys.
29. Nubrėžkite tiesę AB. Panaudodami mastelinę liniuotę toje tiesėje pažymėkite tašką C, kad AC būtų lygi 2 cm. Kiek tokių taškų tiesėje AB galima pažymėti?

Klausimai ir uždaviniai

30. Taškas B atkarpą AC dalija į dvi atkarpas. Raskite atkarpos AC ilgį, kai $AB=7{,}8$ cm, $BC=25$ mm.
31. Taškas B atkarpą AC dalija į dvi atkarpas. Raskite atkarpos BC ilgį, kai: a) $AB=3{,}7$ cm, $AC=7{,}2$ cm; b) $AB=4$ mm, $AC=4$ cm.
32. Taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje. Yra žinoma, kad $AB=12$ cm, $BC=13{,}5$ cm. Koks gali būti atkarpos AC ilgis?
33. Taškai B, D ir M yra vienoje tiesėje. Yra žinoma, kad $BD=7$ cm, $MD=16$ cm. Koks gali būti atstumas BM?
34. Atkarpa AB lygi 64 cm. Taškas C — atkarpos AB vidurys. Spindulyje CA pažymėtas taškas D; be to, $CD=15$ cm. Raskite atkarpų BD ir DA ilgius.
35. Atstumas tarp miestų M ir L lygus 650 km. Miestas K yra tarp miestų M ir L 170 km atstumu nuo M. Laikydami, kad visi trys miestai yra vienoje tiesėje, raskite atstumą tarp miestų K ir L.

36. Ar taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, kai $AC=5$ cm, $AB=$ $=3$ cm, $BC=4$ cm?

S p r e n d i m a s. Jei taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, tai didžiausioji iš atkarpų AB, BC ir AC lygi kitų dviejų atkarpų sumai. Ilgiausia iš duotų atkarpų (atkarpa AC) lygi 5 cm, o kitų dviejų atkarpų suma $(AB+BC)$ lygi 7 cm. Vadinasi, taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje.

37. Taškas C — atkarpos AB vidurys, taškas O — atkarpos AC vidurys. a) Raskite AC, CB, AO ir OB, kai $AB=2$ cm; b) raskite AB, AC, AO ir OB, kai $CB=3,2$ m.

38. Tiesėje pažymėti taškai O, A ir B; be to, $OA=12$ cm, $OB=$ $=9$ cm. Raskite atstumą tarp atkarpų OA ir OB vidurio taškų, kai taškas O: a) yra atkarpoje AB; b) nėra atkarpoje AB.

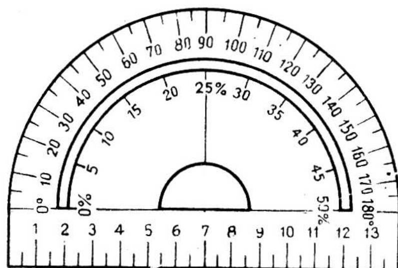
39. Atkarpos ilgis lygus a. Taškas atkarpą dalija į dvi atkarpas. Raskite atstumą tarp tų atkarpų vidurio taškų.

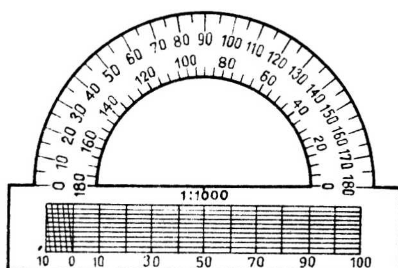
40. 28 cm ilgio atkarpa padalyta į tris nelygias atkarpas. Atstumas tarp kraštinių atkarpų vidurio taškų lygus 16 cm. Raskite vidurinės atkarpos ilgį.

§ 5. KAMPŲ MATAVIMAS

9. Kampo laipsninis matas. Kampų matavimas panašus į atkarpų matavimą. Jis pagrįstas kampų palyginimu su kampu, kuris laikomas matavimo vienetu. Dažnai kampų matavimo vienetu pasirenkamas *láipsnis* — kampas, lygus ištiestinio kampo $\frac{1}{180}$ daliai. Toks kampų matavimo vienetas pradėtas vartoti prieš daugelį šimtmečių, dar prieš Kristų.

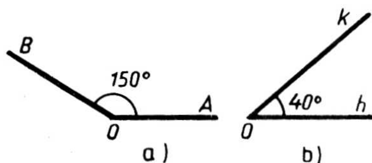
Teigiamas skaičius, kuris parodo, kiek kartų laipsnis ir jo dalys telpa nagrinėjamame kampe, vadinamas *kam̃po láipsniniu matù*. Kampai matuojami matlankiu (32 pav.).



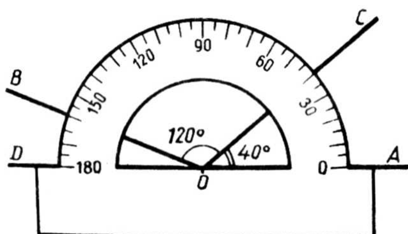


32 pav.

2. Geometrija VII—IX klasei.



33 pav.



34 pav.

33 paveiksle, *a*, pavaizduotas kampas *AOB*, kurio laipsninis matas 150°. Paprastai sakoma trumpiau: „Kampas *AOB* lygus 150°" ir rašoma šitaip: $\angle AOB = 150°$. 33 paveiksle, *b*, kampas *hk* lygus 40° ($\angle hk = 40°$). $\frac{1}{60}$ laipsnio dalis vadinama *minutė*, o $\frac{1}{60}$ minutės dalis — *sekùnde*. Minutės žymimos ženklu „′", o sekundės — ženklu „″". Pavyzdžiui, 60 laipsnių 32 minučių ir 17 sekundžių kampas žymimas šitaip: 60°32′17″.

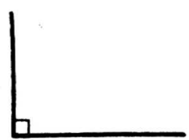
Jei du kampai lygūs, tai laipsnis ir jo dalys tuose kampuose telpa po vienodą skaičių kartų, t. y. *lygių kampų laipsniniai matai lygūs*. Jei vienas kampas mažesnis už kitą, tai jame laipsnis (arba jo dalis) telpa mažesnį skaičių kartų negu kitame kampe, t. y. *mažesnio kampo laipsninis matas mažesnis*.

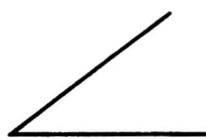
Kadangi laipsnis yra $\frac{1}{180}$ ištiestinio kampo dalis, tai *ištiestinis kampas lygus* 180°. *Neištiestinis kampas mažesnis už* 180°, nes jis mažesnis už ištiestinį kampą.

34 paveiksle pavaizduoti spinduliai, kurių pradžia yra taškas *O*. Spindulys *OC* kampą *AOB* dalija į du kampus: *AOC* ir *COB*. Matome, kad $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$. Taigi $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$. Aišku, kad ir visais kitais atvejais, *kai spindulys kampą dalija į du kampus, viso kampo laipsninis matas lygus tų kampų laipsninių matų sumai.*

Kampas, lygus 90°, vadinamas *stačiúoju* (35 pav., *a*), mažesnis už 90°, t. y. mažesnis už statųjį kampą,— *smailiúoju* (35 pav., *b*), didesnis už 90°, bet mažesnis už 180°, t. y. didesnis už statųjį kampą, bet mažesnis už ištiestinį kampą,— *bukúoju* (35 pav., *c*).

Nemažai stačiųjų kampų matome aplinkoje: kambario sienų ir lubų susikirtimo linijos, stačiakampio stalo kraštai sudaro stačiuosius kampus ir t. t.







35 pav.

10. Kampų matavimas vietovėje. Kampai vietovėje matuojami specialiais prietaisais. Paprasčiausias iš jų yra *astroliãbija* (36 pav.). Ją sudaro dvi dalys: laipsniais padalytas diskas ir apie disko centrą besisukanti liniuotė (alidadė). Jos galuose yra du siauri plyšeliai. Jie panaudojami nustatant alidadę reikiama kryptimi.

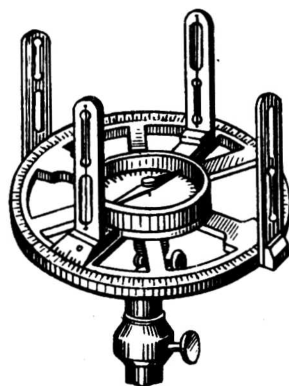
Norint išmatuoti kampą *AOB* vietovėje, trikojis su astroliabija statomas taip, kad prie disko centro pritvirtintas svambalas būtų tiksliai virš taško *O*. Po to alidadė nustatoma išilgai vienos iš kraštinių *OA* arba *OB* ir pažymima padala, ties kuria yra alidadės rodyklė. Po to alidadė sukama ir nukreipiama kita matuojamo kampo kraštine, pažymima padala ties kuria atsiduria alidadės rodyklė. Padalų skirtumas yra kampo *AOB* laipsninis matas.

Kampai matuojami atliekant įvairius tyrimus, pavyzdžiui, nustatant dangaus kūnų padėtis. Labai svarbu reikiamu tikslumu išmatuoti dirbtinių palydovų padėties orbitose kampus. Tam konstruojami specialūs prietaisai. Jais gauti duomenys apdorojami elektroninėmis skaičiavimo mašinomis (ESM).

Praktikos darbai

41. Nubraižykite tris neištiestinius kampus ir vieną ištiestinį kampą, juos pažymėkite šitaip: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ ir $\angle MNP$. Matlankiu išmatuokite kampus ir užrašykite gautus rezultatus.

42. Nubrėžkite spindulį *OA* ir nuo jo su matlankiu atidėkite tokius kampus: $\angle AOB = 23°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 138°$.



Astroliabija

36 pav.

43. Nubraižykite 70° kampą ir, panaudodami matlankį, nubrėžkite jo pusiaukampinę.

44. Nubraižykite kampą AOB ir, panaudodami matlankį, nubrėžkite tokį spindulį OC, kad spindulys OA būtų kampo BOC pusiaukampinė. Ar visada tai galima padaryti?

Klausimai ir uždaviniai

45. Dviejų kampų laipsniniai matai lygūs. Ar tie kampai lygūs?

46. 37 paveiksle pavaizduoti spinduliai, turintys bendrą pradžią O. a) Raskite kampų AOX, BOX, AOB, COB, DOX laipsninius matus; b) išvardykite kampus, lygius 20°; c) išvardykite lygius kampus; d) išvardykite visus kampus, kurių kraštinė OA, ir raskite jų laipsninius matus.

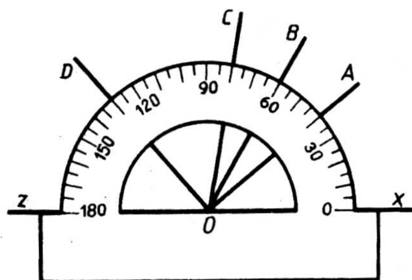
47. Spindulys OE kampą AOB dalija į du kampus. Raskite $\angle AOB$, kai: a) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$; b) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$.

48. Spindulys OC kampą AOB dalija į du kampus. Raskite kampą COB, kai $\angle AOB = 78°$, o kampas AOC 18° mažesnis už kampą BOC.

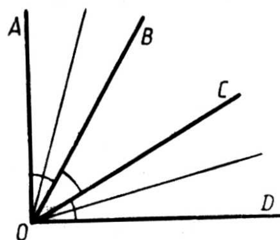
49. Spindulys OC kampą AOB dalija į du kampus. Raskite kampą AOC, kai $\angle AOB = 155°$, o kampas AOC 15° didesnis už kampą COB.

50. Kampas AOB yra kampo AOC dalis. Yra žinoma, kad $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Raskite kampą AOB.

51. 38 paveiksle kampas AOD — status, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Raskite kampą, kurį sudaro kampų AOB ir COD pusiaukampinės.



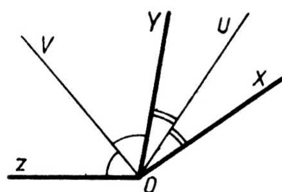
37 pav.



38 pav.

52. 39 paveiksle spindulys OV yra kampo ZOY pusiaukampinė, o spindulys OU — kampo XOY pusiaukampinė. Raskite kampą XOZ, kai $\angle UOV = 80°$.

53. Spindulys l yra neištiestinio kampo hk pusiaukampinė. Ar kampas hl gali būti status arba bukas?



39 pav.

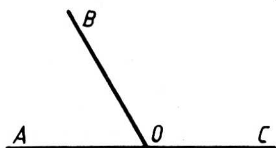
§ 6. STATMENOSIOS TIESĖS

11. Gretutiniai ir kryžminiai kampai. *Du kampai, kurių viena kraštinė bendra, o kitos dvi yra viena kitos tęsiniai, vadinami gretutiniais.* 40 paveiksle kampai AOB ir BOC — gretutiniai. Kadangi spinduliai OA ir OC sudaro ištiestinį kampą, tai $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°$. Taigi *gretutinių kampų suma lygi* 180°.

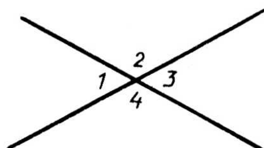
Du kampai, kurių vieno kraštinės yra kito kraštinių tęsiniai, vadinami kryžminiais. 41 paveiksle kampai *1* ir *3* bei *2* ir *4* — kryžminiai.

Kampas *2* yra gretutinis ir kampui *1*, ir kampui *3*. Remiantis gretutinių kampų savybe, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ ir $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Iš čia gauname: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Taigi kampų *1* ir *3* laipsniniai matai lygūs. Iš to išplaukia, kad ir patys kampai lygūs. Taigi *kryžminiai kampai lygūs.*

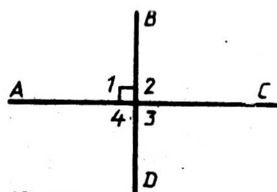
12. Statmenosios tiesės. Išnagrinėkime dvi susikertančias tieses (42 pav.). Jos sudaro keturis neištiestinius kampus. Jei kuris nors vienas jų status (42 pav. kampas *1*), tai kiti kampai



40 pav.



41 pav.



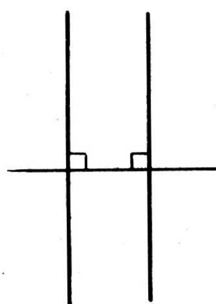
42 pav.

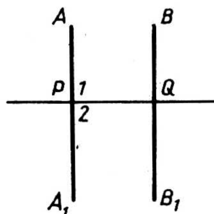
irgi statūs (paaiškinkite, kodėl). *Dvi susikertančios tiesės, kurios sudaro keturis stačiuosius kampus, vadinamos statmenõsiomis* (arba *tarpusavyje statmenomìs*). Tiesių AC ir BD statmenumas žymimas šitaip: $AC \perp BD$ (skaitoma: „Tiesė AC statmena tiesei BD").

Dvi tiesės, statmenos trečiai, nesusikerta (43 pav., *a*). Norėdami tuo įsitikinti, išnagrinėkime tieses AA_1 ir BB_1, statmenas tiesei PQ (43 pav., *b*). Mintyse paveikslą perlenkime per tiesę PQ taip, kad viršutinė paveikslo dalis sutaptų su apatine. Kadangi statieji kampai *1* ir *2* lygūs, tai spindulys PA sutaps su spinduliu PA_1. Panašiai spindulys QB sutaps su spinduliu QB_1. Todėl, jei tarsime, kad tiesės AA_1 ir BB_1 susikerta taške M, tai tas taškas sutaps su tam tikru tašku M_1, irgi esančiu tose tiesėse (43 pav., *c*). Taigi gausime, kad per taškus M ir M_1 eina dvi tiesės: AA_1 ir BB_1. Taip negali būti. Vadinasi, prielaida neteisinga. Taigi tiesės AA_1 ir BB_1 nesusikerta.

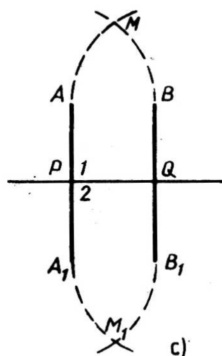
Statmenos tiesės brėžiamos su kampainiu ir liniuote (44 pav.).

13. Stačiųjų kampų sudarymas vietovėje. Statiesiems kampams sudaryti vietovėje naudojami specialūs prietaisai, kurių paprasčiausias yra *èkeris*. Ekerį sudaro dvi statmenos lentelės, pritvirtintos prie trikojo (45 pav.). Lentelių galuose vinys įkaltos taip, kad per jas einančios tiesės būtų tarpusavyje statmenos. Norint vietovėje sudaryti statųjį kampą, kurio kraštinė OA, trikojis su ekeriu statomas taip, kad svambalas būtų tiksliai virš taško O, o vienos lentelės kryptis sutaptų su spindulio OA kryp-


a)

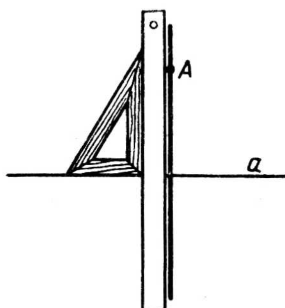


b)



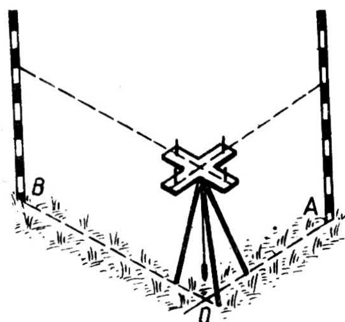
c)

43 pav.



Statmenųjų tiesių brėžimas

44 pav.



Ekeris

45 pav.

timi. Sutapdinti kryptis galima įsmeigiant spindulio taškuose gaires. Po to gairės smeigiamos antros lentelės kryptimi (45 paveiksle tiesė OB). Taip gaunamas statusis kampas AOB.

Geodezijoje statiesiems kampams sudaryti naudojami tobulesni prietaisai, pavyzdžiui, *teodolitas*.

Praktikos darbai

54. Nubraižykite smailųjį kampą AOB ir spindulio OB tęsinyje pažymėkite tašką D. Palyginkite kampus AOB ir AOD.

55. Nubraižykite tris kampus: smailųjį, statųjį ir bukąjį. Nubraižykite kiekvienam tų kampų gretutinį kampą.

56. Nubraižykite neištiestinį kampą hk. Nubraižykite kampą h_1k_1, kryžminį kampui hk.

57. Nubraižykite neištiestinį kampą MON, jo viduje pažymėkite tašką P, o išorėje — tašką Q. Su kampainiu ir liniuote per taškus P ir Q nubrėžkite tieses, statmenas tiesėms OM ir ON.

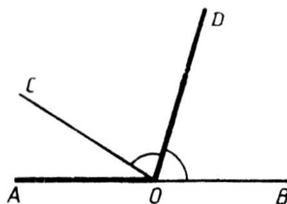
Klausimai ir uždaviniai

58. Raskite kampui ABC gretutinį kampą, kai: a) $\angle ABC=111°$; b) $\angle ABC=90°$; c) $\angle ABC=15°$.

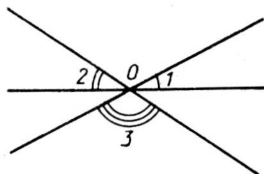
59. Vienas iš gretutinių kampų status. Koks (smailus, status ar bukas) kitas kampas?

60. Ar teisingas teiginys: jei gretutiniai kampai lygūs, tai jie statūs?

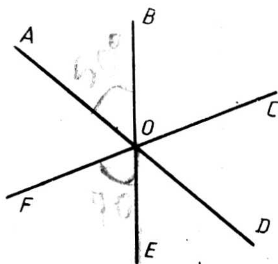
61. Raskite gretutinius kampus hk ir kl, kai: a) $\angle hk$ mažesnis už $\angle kl$ 40°; b) $\angle hk$ didesnis už $\angle kl$ 120°; c) $\angle hk$ didesnis už $\angle kl$ 47°18′; d) $\angle hk=3\angle kl$; e) $\angle hk : \angle kl=5:4$.



46 pav.



47 pav.



48 pav.

62. 46 paveiksle kampai *BOD* ir *COD* lygūs. Raskite kampą *AOD*, kai $\angle COB = 148°$.

63. Duoti du lygūs kampai. Ar jiems gretutiniai kampai lygūs?

64. Raskite 41 paveikslo kampus: a) *1*, *3*, *4*, kai $\angle 2 = 117°$; b) *1*, *2*, *4*, kai $\angle 3 = 43°27'$.

65. Raskite neištiestinius kampus, gautus susikirtus dviem tiesėms, kai: a) dviejų iš jų suma lygi 114°; b) trijų kampų suma lygi 220°.

66. Raskite 41 paveikslo kampus *1*, *2*, *3*, *4*, kai: a) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$; b) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$; c) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.

67. 47 paveiksle pavaizduotos trys tiesės, susikertančios taške *O*. Raskite šitokią kampų sumą: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

68. 48 paveiksle $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Raskite kampus *AOC*, *BOD*, *COE* ir *COD*.

69. Tiesė *a* kampo *A* kraštines kerta taškuose *P* ir *Q*. Ar abi tiesės *AP* ir *AQ* gali būti statmenos tiesei *a*?

70. Per tašką *A*, nesantį tiesėje *a*, nubrėžtos trys tiesės, kertančios tiesę *a*. Įrodykite, kad bent dvi iš jų nestatmenos tiesei *a*.

I SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kiek tiesių galima nubrėžti per du taškus?
2. Kiek bendrų taškų gali turėti dvi tiesės?
3. Paaiškinkite, kas yra atkarpa.
4. Paaiškinkite, kas yra spindulys. Kaip žymimi spinduliai?
5. Kokia figūra vadinama kampu? Paaiškinkite, kas yra kampo viršūnė ir kraštinės.
6. Koks kampas vadinamas ištiestiniu?
7. Kokios figūros vadinamos lygiomis?

8. Paaiškinkite, kaip palyginamos dvi atkarpos.
9. Koks taškas vadinamas atkarpos viduriu?
10. Paaiškinkite, kaip palyginami du kampai.
11. Koks spindulys vadinamas kampo pusiaukampine?
12. Taškas C atkarpą AB dalija į dvi atkarpas. Kaip galima rasti atkarpos AB ilgį žinant atkarpų AC ir CB ilgius?
13. Kokiais prietaisais matuojami atstumai?
14. Kas yra kampo laipsninis matas?
15. Spindulys OC kampą AOB dalija į du kampus. Kaip galima rasti kampo AOB laipsninį matą žinant kampų AOC ir COB laipsninius matus?
16. Koks kampas vadinamas smailiuoju? stačiuoju? bukuoju?
17. Kokie kampai vadinami gretutiniais? Kam lygi gretutinių kampų suma?
18. Kokie kampai vadinami kryžminiais? Kokia kryžminių kampų savybė?
19. Kokios tiesės vadinamos statmenosiomis?
20. Paaiškinkite, kodėl dvi tiesės, statmenos trečiai, nesusikerta.
21. Kokie prietaisai naudojami sudarant stačiuosius kampus vietovėje?

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

71. Pažymėkite keturis taškus, kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Per kiekvienus du taškus nubrėžkite tiesę. Kiek tiesių gavote?

72. Duotos keturios tiesės, kurių kiekvienos dvi susikerta. Kiek yra susikirtimo taškų, jei per kiekvieną susikirtimo tašką eina tik dvi tiesės?

73. Kiek neištiestinių kampų gaunama susikirtus trims tiesėms, einančioms per vieną tašką?

74. Taškas N yra atkarpoje MP. Atstumas tarp taškų M ir P lygus 24 cm, o atstumas tarp taškų N ir M du kartus didesnis už atstumą tarp taškų N ir P. Raskite atstumą: a) tarp taškų N ir P; b) tarp taškų N ir M.

75. Taškai K, L, M yra vienoje tiesėje; $KL=6$ cm, $LM=10$ cm. Koks gali būti atstumas KM? Kiekvieną galimą atvejį pavaizduokite paveikslu.

76. Atkarpos AB ilgis lygus a. Taškai P ir Q ją dalija į tokias tris atkarpas AP, PQ ir QB, kad $AP=2PQ=2QB$. Raskite

atstumą tarp: a) taško A ir atkarpos QB vidurio; b) atkarpų AP ir QB vidurio taškų.

77. Atkarpa, kurios ilgis m, padalyta į: a) tris lygias dalis; b) penkias lygias dalis. Raskite atstumą tarp kraštinių dalių vidurių.

78. 36 cm atkarpa padalyta į keturias nelygias dalis. Atstumas tarp kraštinių dalių vidurio taškų lygus 30 cm. Raskite atstumą tarp vidurinių dalių vidurių.

79*. Taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, taškai M ir N — atkarpų AB ir AC vidurio taškai. Įrodykite, kad $BC=2MN$.

80. Yra žinoma, kad $\angle AOB=35°$, $\angle BOC=50°$. Raskite kampą AOC. Panaudodami liniuotę ir matlankį, kiekvieną galimą atvejį pavaizduokite paveikslu.

81. Kampas hk lygus 120°, o kampas hm lygus 150°. Raskite kampą km. Kiekvieną galimą atvejį pavaizduokite paveikslu.

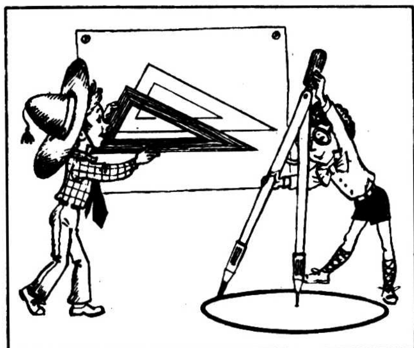
82. Raskite gretutinius kampus, kurių: a) vienas 45° didesnis už kitą; b) skirtumas lygus 35°.

83. Raskite kampą, kurį sudaro dviejų gretutinių kampų pusiaukampinės.

84. Įrodykite, kad kryžminių kampų pusiaukampinės yra vienoje tiesėje.

85*. Jei kampų ABC ir CBD pusiaukampinės statmenos, tai taškai A, B ir D yra vienoje tiesėje. Įrodykite.

86. Duotos dvi susikertančios tiesės a ir b bei tose tiesėse nesantis taškas A. Per tašką A nubrėžtos tiesės m ir n taip, kad $m \perp a$, $n \perp b$. Įrodykite, kad tiesės m ir n nesutampa.



II skyrius

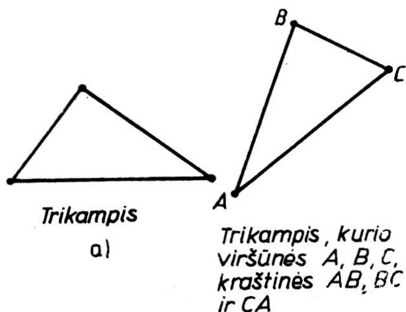
TRIKAMPIAI

§ 1. PIRMASIS TRIKAMPIŲ LYGUMO POŽYMIS

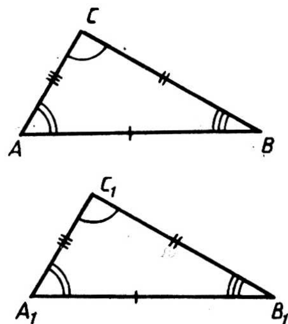
14. Trikampis. Pažymėkime tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, ir juos sujunkime atkarpomis (49 pav., *a*). Gausime geometrinę figūrą, kuri vadinama *trìkampiu.* Pažymėtieji trys taškai vadinami trikampio *viršūnėmis*, o atkarpos — *kraštìnėmis.* 49 paveiksle, *b*, pavaizduotas trikampis, kurio viršūnės *A*, *B*, *C*, o kraštinės *AB*, *BC* ir *CA*. Tokį trikampį žymėsime šitaip: $\triangle ABC$ (skaitoma „trikampis *ABC*"). Tą patį trikampį galima žymėti ir kitaip, raides *A*, *B*, *C* rašant kita tvarka: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ ir t. t.

Trys kampai — $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ — vadinami *trìkampio ABC kampaĩs.* Dažnai jie žymimi viena raide: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Visų trikampio kraštinių ilgių suma vadinama jo *perimetrù.*

Priminsime, kad dvi figūros (skyrium imant, du trikampiai), kurias galima sutapdinti uždedant vieną ant kitos, vadinamos lygiomis. 50 paveiksle pavaizduoti lygūs trikampiai *ABC* ir $A_1B_1C_1$.



49 pav.



50 pav.

Kiekvieną iš tų trikampių galima uždėti ant kito taip, kad jie visiškai sutaptų, t. y. paporiui sutaptų jų viršūnės ir kraštinės. Aišku, kad tada paporiui sutaps ir tų trikampių kampai. Taigi jei du trikampiai lygūs, tai vieno trikampio *elementai* (t. y. kraštinės ir kampai) atitinkamai lygūs kito trikampio elementams. Pabrėžiame, kad *lygūs trikampiai prieš atitinkamai lygias* (t. y. sutampančias uždedant) *kraštines turi lygius kampus*, ir atvirkščiai: *prieš atitinkamai lygius kampus turi lygias kraštines.* Pavyzdžiui, 50 paveiksle pavaizduotų lygių trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ prieš atitinkamai lygias kraštines AB ir A_1B_1 yra lygūs kampai C ir C_1.

Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ lygumą žymėsime šitaip: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Kad įsitikintume, jog du trikampiai lygūs, galime ir nedėti vieno trikampio ant kito, o tik palyginti tam tikrus jų elementus. Tą klausimą išnagrinėsime vėliau. Galimybė įsitikinti dviejų figūrų lygumu neuždedant vienos ant kitos, o išmatuojant ir palyginant tik tam tikrus tų figūrų elementus, praverčia praktikoje, pavyzdžiui, lyginant du žemės sklypus, kurių, aišku, negalima uždėti vieną ant kito.

15. Pirmasis trikampių lygumo požymis. Matematikoje kiekvienas teiginys, kurio teisingumu įsitikinama samprotaujant, vadinamas *teoremà*; patys samprotavimai vadinami *teorèmos įródymu*. Teoremas mes jau įrodinėjome. Pavyzdžiui, teiginys „kryžminiai kampai yra lygūs" — teorema, o samprotavimai, kuriais įsitikinome, kad kryžminiai kampai lygūs, — tos teoremos įrodymas. Šiame paragrafe įrodysime vieną trikampių lygumo teoremą.

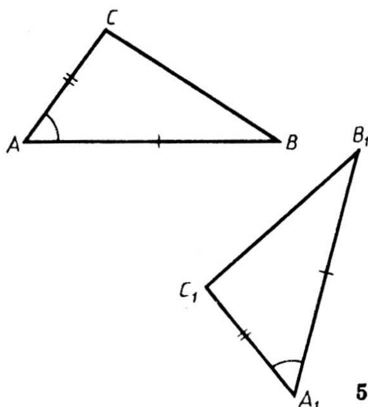
Teorema. ***Jei vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas tarp jų atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir kampui tarp jų, tai tie trikampiai lygūs.***

Įrodymas. Išnagrinėkime trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (51 pav.). Įrodysime, kad $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Kadangi $\angle A = \angle A_1$, tai trikampį ABC galima uždėti ant trikampio $A_1B_1C_1$ taip, kad viršūnė A sutaptų su viršūne A_1, o kraštinės AB ir AC būtų spinduliuose A_1B_1 ir A_1C_1. Kadangi $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, tai kraštinė AB sutaps su kraštine A_1B_1, o kraštinė AC — su kraštine A_1C_1; skyrium imant, sutaps taškai

B ir B_1, C ir C_1. Vadinasi, sutaps kraštinės BC ir B_1C_1. Taigi trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ sutaps. Vadinasi, jie lygūs. Teorema įrodyta.

Įrodytoji teorema išreiškia trikampių lygumo *požymį* (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Jis vadinamas *pirmuoju trikampių lygumo požymiu.*



51 pav.

Praktikos darbai

87. Nubraižykite trikampį, jo viršūnes pažymėkite M, N ir P. a) Išvardykite visus trikampio kampus ir kraštines; b) masteline liniuote išmatuokite kraštines ir raskite trikampio perimetrą.

88. Nubraižykite tokį trikampį DEF, kurio kampas E būtų status. Išvardykite: a) kraštines, esančias prieš kampus D, E, F; b) kampus, esančius prieš kraštines DE, EF, FD; c) kampus, esančius prie kraštinių DE, EF, FD.

89. Su matlankiu ir masteline liniuote nubraižykite trikampį ABC, kurio: a) $AB=4{,}3$ cm, $AC=2{,}3$ cm, $\angle A=23°$; b) $BC=9$ cm, $BA=6{,}2$ cm, $\angle B=122°$; c) $CA=3$ cm, $CB=4$ cm, $\angle C=90°$.

Klausimai ir uždaviniai

90. Trikampio ABC kraštinė AB lygi 17 cm, kraštinė AC dvigubai didesnė už kraštinę AB, o kraštinė BC 10 cm mažesnė už kraštinę AC. Raskite trikampio ABC perimetrą.

91. Trikampio perimetras lygus 48 cm, viena kraštinė lygi 18 cm, o kitų dviejų kraštinių skirtumas lygus 4,6 cm. Raskite tas kraštines.

92. Vieno trikampio perimetras didesnis už kito trikampio perimetrą. Ar tie trikampiai gali būti lygūs?

93. Atkarpos AE ir DC susikerta taške B, kuris yra kiekvienos jų vidurys. a) Įrodykite, kad trikampiai ABC ir EBD lygūs; b) raskite trikampio ABC kampus A ir C, kai trikampio BDE $\angle D=47°$, $\angle E=42°$.

94. 52 paveiksle $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$. a) Įrodykite, kad trikampiai ABD ir ACD lygūs; b) raskite BD ir AB, kai $AC=15$ cm, $DC=5$ cm.

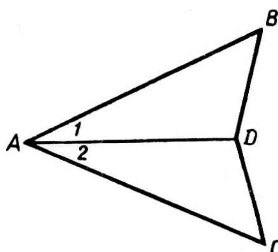
95. 53 paveiksle $BC=AD$, $\angle 1=\angle 2$. a) Įrodykite, kad trikampiai ABC ir CDA lygūs; b) raskite AB ir BC, kai $AD=17$ cm, $DC=14$ cm.

96. 54 paveiksle $OA=OD$, $OB=OC$, $\angle 1=74°$, $\angle 2=36°$. a) Įrodykite, kad trikampiai AOB ir DOC lygūs; b) raskite $\angle ACD$.

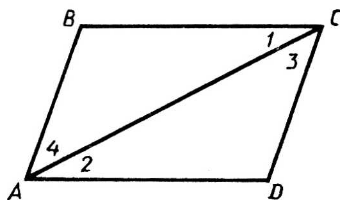
97. Atkarpos AC ir BD susikerta, susikirtimo taškas jas dalija pusiau. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle CDA$.

98. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$. Kraštinėse AB ir A_1B_1 pažymėti taškai P ir P_1; be to, $AP=A_1P_1$. Įrodykite, kad $\triangle BPC=\triangle B_1P_1C_1$.

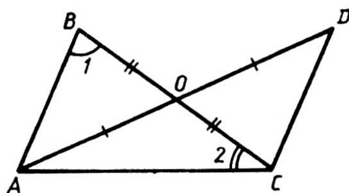
99. Kampo CAD kraštinėse pažymėti taškai B ir E; be to, taškas B — atkarpoje AC, taškas E — atkarpoje AD, $AC=AD$ ir $AB=AE$. Įrodykite, kad $\angle CBD=\angle DEC$.



52 pav.

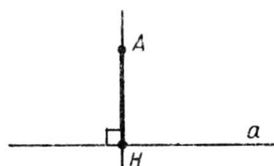


53 pav.



54 pav.

§.2. TRIKAMPIO PUSIAUKRAŠTINĖS, PUSIAUKAMPINĖS IR AUKŠTINĖS



Atkarpa AH - statmuo tiesei a

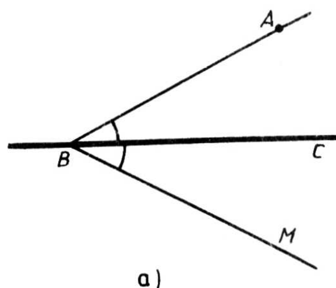
55 pav.

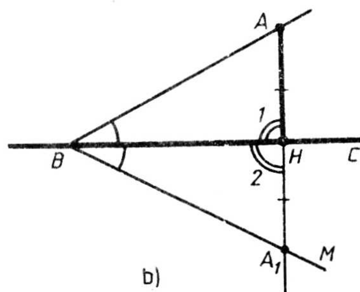
16. Statmuo tiesei. Išnagrinėkime tiesę a ir joje nesantį tašką A (55 pav.). Tašką A atkarpa sujunkime su tiesės a tašku H. Kai tiesės AH ir a yra tarpusavyje statmenos, atkarpa AH vadinama *stãtmeniu, nuleistu iš taško A į tiesę a.* Taškas H vadinamas *statmeñs pãgrindu.*

Teorema. ***Iš taško, nesančio tiesėje, galima nubrėžti statmenį į tą tiesę, tačiau tik vieną.***

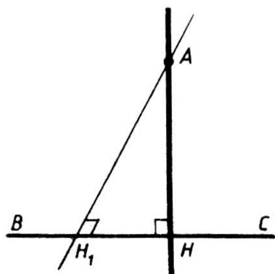
Įrodymas. Sakykime, A — taškas, nesantis tiesėje BC (56 pav.). Iš pradžių įrodysime, kad iš taško A galima nubrėžti statmenį į tiesę BC.

Nuo spindulio BC atidėkime kampą MBC, lygų kampui ABC, kaip parodyta 56 paveiksle, a. Kadangi kampai ABC ir MBC lygūs, tai pirmąjį kampą galima uždėti ant antrojo kampo taip, kad pirmojo kampo kraštinės BA ir BC sutaptų su antrojo kampo kraštinėmis BM ir BC. Tai galima įsivaizduoti kaip paveikslo perlenkimą per tiesę BC. Tada taškas A sutaps su tam tikru spindulio BM tašku A_1 (56 pav., b). Raide H pažymėkime tiesių AA_1 ir BC susikirtimo tašką. Atkarpa AH ir yra ieškomasis statmuo tiesei BC. Įsitikinsime. Minėtu būdu sutapdinant (paveikslą perlenkiant), spindulys HA sutaps su spinduliu HA_1, todėl kampas 1 sutaps su kampu 2. Vadinasi, $\angle 1 = \angle 2$. Tačiau kampai 1 ir 2 — gretutiniai, vadinasi, kiekvienas jų status. Taigi $AH \perp BC$.

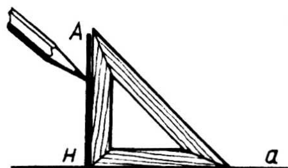




56 pav.



57 pav.



58 pav.

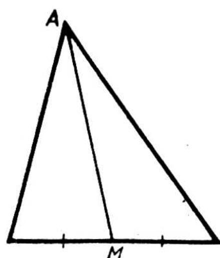
Dabar įrodysime, kad iš taško A galima nubrėžti tik vieną statmenį į tiesę BC.

Jei tarsime, kad iš taško A galima nuleisti dar vieną statmenį AH_1 į tiesę BC, tai gausime, kad dvi tiesės AH ir AH_1, statmenos tiesei BC, susikerta (57 pav.). Tačiau 12 skyrelyje įrodėme, kad taip negali būti. Vadinasi, iš taško A galima nubrėžti tik vieną statmenį į tiesę BC. Teorema įrodyta.

Statmuo iš taško į tiesę brėžiamas su kampainiu (58 pav.).

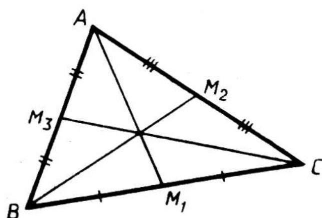
17. Trikampio pusiaukraštinės, pusiaukampinės ir aukštinės. *Atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės viduriu, vadinama trikampio pusiáukraštine* (59 pav., *a*). Kiekvienas trikampis turi tris pusiaukraštines. 59 paveikslo, *b*, atkarpos AM_1, BM_2, CM_3 — trikampio ABC pusiaukraštinės.

Trikampio kampo pusiaukampinės atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės tašku, vadinama trikampio pusiáukampine (60 pav., *a*). Kiekvienas trikampis turi tris pusiaukampines. 60 paveikslo, *b*, atkarpos CC_1, DD_1, EE_1 — trikampio CDE pusiaukampinės.



AM - trikampio pusiaukraštinė

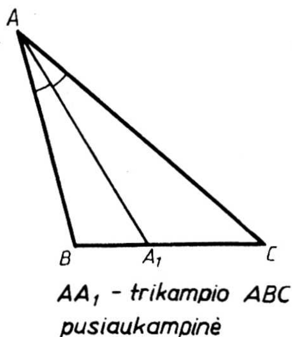
a)

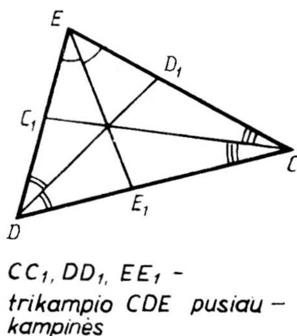


AM_1, BM_2, CM_3 — trikampio ABC pusiaukraštinės

b)

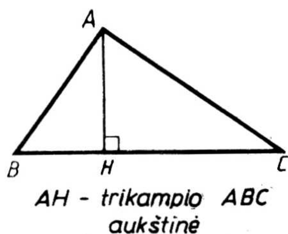
59 pav.





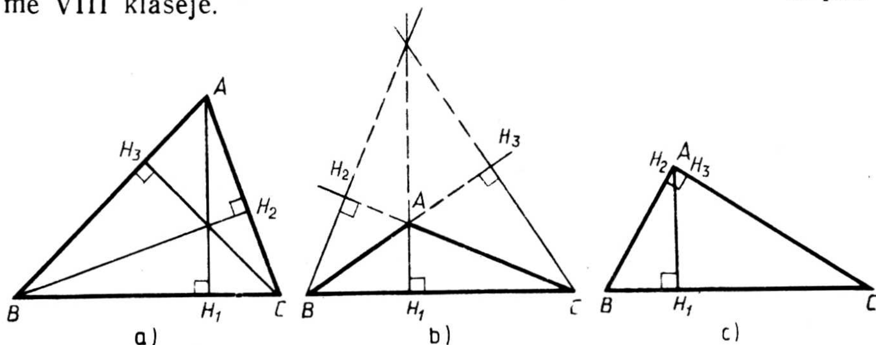
60 pav.

Statmuo, nuleistas iš trikampio viršūnės į tiesę, kurioje yra prieš viršūnę esanti kraštinė, vadinamas trikampio aukštinė (61 pav.). Kiekvienas trikampis turi tris aukštines. 62 paveikslo, *a*, *b*, *c*, atkarpos AH_1, BH_2, CH_3 — trikampio *ABC* aukštinės.



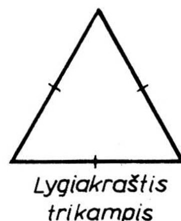
61 pav.

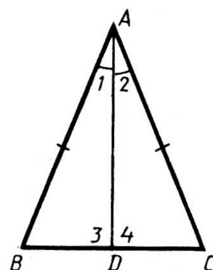
Trikampio pusiaukraštinės, pusiaukampinės ir aukštinės turi įdomių savybių: kiekvieno trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške (59 pav., *b*); trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške (60 pav., *b*); trikampio aukštinės arba jų tęsiniai irgi susikerta viename taške (62 pav., *a*, *b*, *c*). Tuos teiginius įrodysime VIII klasėje.



62 pav.







63 pav. a) b)

64 pav.

18. Lygiašonio trikampio savybės. Trikampis, kurio dvi kraštinės lygios, vadinamas *lygiašoniu*. Lygiosios kraštinės vadinamos lygiašonio trikampio *šoninėmis kraštinėmis*, o trečioji kraštinė — *pagrindu* (63 pav., *a*). Trikampis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas *lygiakraščiu* (63 pav., *b*).

Įrodysime dvi teoremas, išreiškiančias lygiašonio trikampio savybes.

Teorema. ***Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.***

Įrodymas. Išnagrinėkime lygiašonį trikampį ABC, kurio pagrindas BC. Įrodysime, kad $\angle B = \angle C$. Sakykime, AD — trikampio ABC pusiaukampinė (64 pav.). Trikampiai ABD ir ACD lygūs, remiantis pirmuoju trikampių lygumo požymiu ($AB = AC$ — duota sąlygoje, AD — bendra kraštinė, $\angle 1 = \angle 2$, nes AD — pusiaukampinė). Iš tų trikampių lygumo išplaukia, kad $\angle B = \angle C$. Teorema įrodyta.

Teorema. ***Lygiašonio trikampio pusiaukampinė, nubrėžta į pagrindą, yra pusiaukraštinė ir aukštinė.***

Įrodymas. Grįžkime prie 64 paveikslo, kuriame ABC — lygiašonis trikampis, BC — jo pagrindas, AD — pusiaukampinė. Iš trikampių ABD ir ACD lygumo išplaukia, kad $BD = DC$ ir $\angle 3 = \angle 4$. Lygybė $BD = DC$ reiškia, kad taškas D — kraštinės BC vidurys, taigi AD — trikampio ABC pusiaukraštinė. Kadangi kampai *3* ir *4* gretutiniai ir lygūs, tai jie statūs. Vadinasi, atkarpa AD yra ir trikampio ABC aukštinė. Teorema įrodyta.

Įsitikinome, kad lygiašonio trikampio pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė, nubrėžtos į pagrindą, sutampa. Todėl teisingi šitokie teiginiai:

1. *Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, yra pusiaukraštinė ir pusiaukampinė.*

2. *Lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą, yra aukštinė ir pusiaukampinė.*

Praktikos darbai

100. Nubrėžkite tiesę *a*, skirtingose tiesės *a* pusėse *pažymėkite* taškus *A* ir *B*. Naudodamiesi kampainiu iš tų taškų nubrėžkite statmenis į tiesę *a*.

101. Nubraižykite trikampį. Panaudodami mastelinę liniuotę pažymėkite kraštinių vidurio taškus ir nubrėžkite trikampio pusiaukraštines.

102. Nubraižykite trikampį. Su matlankiu ir liniuote nubrėžkite jo pusiaukampines.

103. Nubraižykite trikampį *ABC*, kurio visi trys kampai smailieji, ir trikampį *MNP*, kurio kampas *M* bukas. Panaudodami kampainį nubrėžkite tų trikampių aukštines.

104. Nubraižykite tris tokius lygiašonius trikampius, kad prieš pagrindą esantis kampas būtų: a) smailusis; b) statusis; c) bukasis.

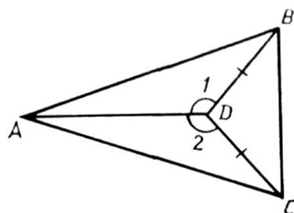
Uždaviniai

105. Taškai *A* ir *C* yra vienoje tiesės *a* pusėje. Statmenys *AB* ir *CD* tiesei *a* lygūs. a) Įrodykite, kad $\triangle ABD = \triangle CDB$; b) raskite $\angle ABC$, kai $\angle ADB = 44°$.

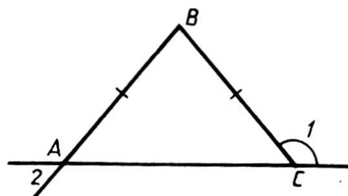
106. Trikampio *ABC* pusiaukraštinės *AD* tęsinyje už kraštinės *BC* atidėta atkarpa *DE*, lygi *AD*, ir taškas *E* sujungtas su tašku *C*. a) Įrodykite, kad $\triangle ABD = \triangle ECD$; b) raskite $\angle ACE$, kai $ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

107. Lygiašonio trikampio pagrindas du kartus mažesnis už šoninę kraštinę, perimetras lygus 50 cm. Raskite trikampio kraštines.

108. Lygiašonio trikampio *ABC*, kurio pagrindas *BC*, perimetras lygus 40 cm; lygiakraščio trikampio *BCD* perimetras lygus 45 cm. Raskite kraštines *AB* ir *BC*.



65 pav.



66 pav.

109. Nubrėžta lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas BC, pusiaukraštinė AM. Trikampio ABC perimetras lygus 32 cm, o trikampio ABM perimetras lygus 24 cm. Raskite pusiaukraštinę AM.

110. Trikampio pusiaukraštinė sutampa su jo aukštine. Įrodykite, kad tas trikampis lygiašonis.

111. 65 paveiksle $CD=BD$, $\angle 1=\angle 2$. Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis.

112. 66 paveiksle $AB=BC$, $\angle 1=130°$. Raskite $\angle 2$.

113. Taškai M ir P yra vienoje tiesės b pusėje. Statmenys MN ir PQ, nubrėžti į tiesę b, lygūs. Taškas O — atkarpos NQ vidurys. a) Įrodykite, kad $\angle OMP=\angle OPM$; b) raskite $\angle NOM$, kai $\angle MOP=105°$.

114. Įrodykite, kad lygių trikampių pusiaukraštinės, nubrėžtos į lygias kraštines, lygios.

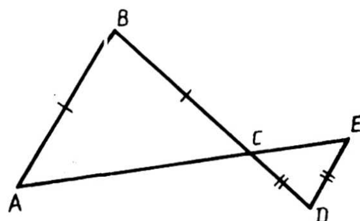
115. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM lygi atkarpai BM. Įrodykite, kad vienas iš trikampio ABC kampų lygus kitų dviejų kampų sumai.

116. Įrodykite, kad lygiakraščio trikampio visi kampai lygūs.

117. 67 paveiksle $AB=BC$, $CD=DE$. Įrodykite, kad $\angle BAC=\angle CED$.

118. Lygiašonio trikampio ABC pagrinde BC pažymėti taškai M ir N; be to, $BM=CN$. Įrodykite, kad: a) $\triangle BAM=\triangle CAN$; b) trikampis AMN lygiašonis.

119. Atkarpa EF — lygiašonio trikampio DEK, kurio pagrindas DK, pusiaukampinė, $DK=16$ cm, $\angle DEF=43°$. Raskite KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.



67 pav.

120. Nubrėžta lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas AC, pusiaukraštinė BD. Kraštinėse AB ir CB pažymėti taškai E ir F; $AE=CF$. Įrodykite, kad: a) $\triangle BDE=\triangle BDF$; b) $\triangle ADE=\triangle CDF$.

§ 3. ANTRASIS IR TREČIASIS TRIKAMPIŲ LYGUMO POŽYMIAI

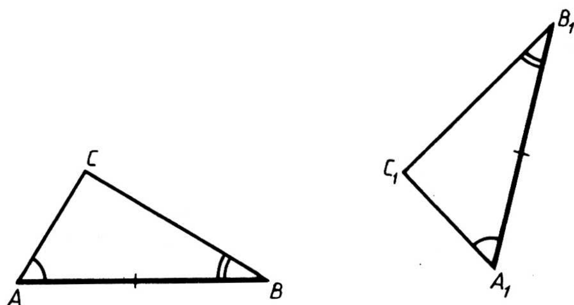
19. Antrasis trikampių lygumo požymis

T e o r e m a. ***Jei vieno trikampio kraštinė ir du prie jos esantys kampai atitinkamai lygūs kito trikampio kraštinei ir dviem prie jos esantiems kampams, tai tie trikampiai lygūs.***

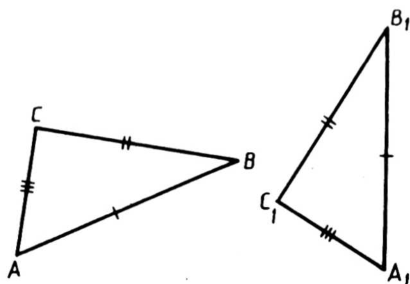
Į r o d y m a s. Išnagrinėkime trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ (68 pav.). Įrodysime, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Trikampį ABC uždėkime ant trikampio $A_1B_1C_1$ taip, kad viršūnė A sutaptų su viršūne A_1, kraštinė AB — su jai lygia kraštine A_1B_1, o viršūnės C ir C_1 būtų vienoje tiesės A_1B_1 pusėje.

Kadangi $\angle A=\angle A_1$ ir $\angle B=\angle B_1$, tai kraštinė AC bus spindulyje A_1C_1, o kraštinė BC — spindulyje B_1C_1. Todėl viršūnė C — kraštinių AC ir BC bendras taškas — bus ir spindulyje A_1C_1, ir spindulyje B_1C_1, vadinasi, sutaps su tų spindulių bendru tašku — viršūne C_1. Taigi sutaps kraštinės AC ir A_1C_1, BC ir B_1C_1. Gavome, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ sutampa, todėl jie lygūs. Teorema įrodyta.



68 pav.



69 pav.

20. Trečiasis trikampių lygumo požymis

Teorema. ***Jei vieno trikampio visos kraštinės atitinkamai lygios kito trikampio visoms kraštinėms, tai tie trikampiai lygūs.***

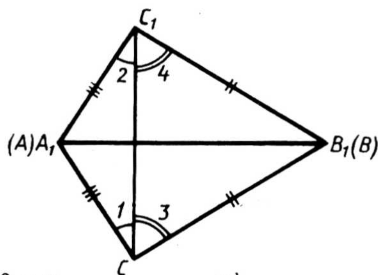
Įrodymas. Išnagrinėkime trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CA=$ $=C_1A_1$ (69 pav.). Įrodysime, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

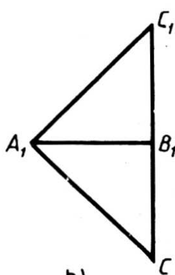
Trikampį ABC pridėkime prie trikampio $A_1B_1C_1$ taip, kad viršūnė A sutaptų su viršūne A_1, viršūnė B — su viršūne B_1, o viršūnės C ir C_1 būtų skirtingose tiesės A_1B_1 pusėse (70 pav.).

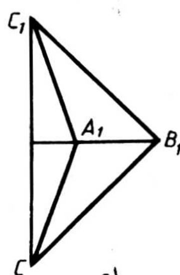
Gali būti trys atvejai: spindulys C_1C yra kampo $A_1C_1B_1$ viduje (70 pav., *a*); spindulys C_1C sutampa su viena to kampo kraštine (70 pav., *b*); spindulys C_1C yra kampo $A_1C_1B_1$ išorėje (70 pav., *c*). Išnagrinėsime pirmąjį atvejį (kitus atvejus išnagrinėkite savarankiškai).

Remiantis teoremos sąlyga, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, todėl trikampiai A_1C_1C ir B_1C_1C — lygiašoniai (žr. 70 pav., *a*). Remiantis lygiašonio trikampio kampų savybės teorema, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, todėl $\angle A_1CB_1=\angle A_1C_1B_1$. Taigi $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle C=\angle C_1$. Remiantis pirmuoju trikampių lygumo požymiu, $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. Teorema įrodyta.

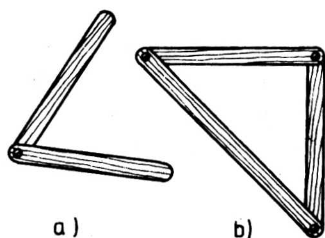
Iš trečiojo trikampių lygumo požymio išplaukia, kad *trikampis — standžioji figūra*. Paaiškinsime, ką tai reiškia. Įsivaizduokime dvi lenteles, kurių galai sutvirtinti vinimi (71 pav., *a*). Tokia konstrukcija nėra standi: suglaudžiant arba praskečiant lais-



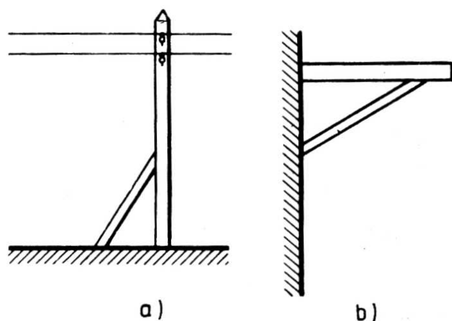




70 pav.



71 pav.



72 pav.

vuosius lentelių galus galima keisti kampą tarp jų. Paimkime dar vieną lentelę ir jos galus sudėkime su pirmųjų dviejų lentelių laisvaisiais galais ir perkalkime vinimis (71 pav., *b*). Gautoji konstrukcija — trikampis — jau standi: negalima suglausti arba praskėsti jokių dviejų jos kraštinių, t. y. negalima keisti nė vieno kampo. Jei iš tikrųjų tai pavyktų, tai gautume naują trikampį, nelygų pradiniam trikampiui. Tačiau taip negali būti, nes naujasis trikampis, remiantis trečiuoju trikampių lygumo požymiu, lygus pradiniam trikampiui.

Trikampio standumo savybė dažnai pritaikoma praktikoje. Pavyzdžiui, norint vertikaliai įtvirtinti stulpą, jam statoma atrama (72 pav., *a*); tokiu pačiu principu daroma gembė (72 pav., *b*).

Uždaviniai

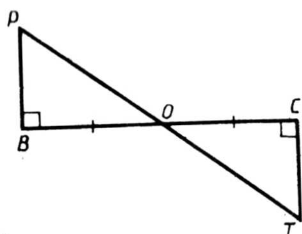
121. Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, kuris yra atkarpos AB vidurys; $\angle OAD = \angle OBC$. a) Įrodykite, kad $\triangle CBO = \triangle DAO$; b) raskite BC ir CO, kai $CD = 26$ cm, $AD = 15$ cm.

122. 53 paveiksle $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. a) Įrodykite, kad $\triangle ABC = \triangle CDA$; b) raskite AB ir BC, kai $AD = 19$ cm, $CD = 11$ cm.

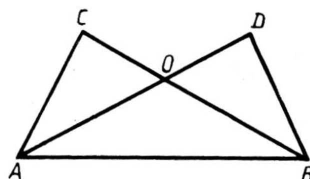
123. Kampo A pusiaukampinėje pažymėtas taškas D, o jo kraštinėse — taškai B ir C; $\angle ADB = \angle ADC$. Įrodykite, kad $BD = CD$.

124. Remdamiesi 73 paveikslo duomenimis įrodykite, kad $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

125. 74 paveiksle $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Įrodykite, kad $\angle C = \angle D$ ir $AC = BD$.



73 pav.



74 pav.

126. 74 paveiksle $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ cm. Raskite DB.

127. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. Kraštinėse AB ir A_1B_1 pažymėti taškai D ir D_1; be to, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Įrodykite, kad $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

128. Įrodykite, kad lygių trikampių pusiaukampinės, nubrėžtos į atitinkamai lygias kraštines, lygios.

129. Atkarpos AC ir BD susikerta taške O, kuris yra atkarpos AC vidurys; $\angle BCO = \angle DAO$. Įrodykite, kad $\triangle BOA = \triangle DOC$.

130. Atkarpos CO ir C_1O_1 — trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinės, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ ir $\angle C = \angle C_1$. Įrodykite, kad: a) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$; b) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$.

131. Trikampių DEF ir MNP $EF = NP$, $DF = MP$ ir $\angle F = \angle P$. Kampų E ir D pusiaukampinės susikerta taške O, o kampų M ir N pusiaukampinės — taške K. Įrodykite, kad $\angle DOE = \angle MKN$.

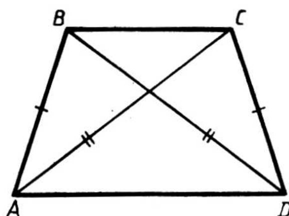
132. Tiesė, statmena kampo A pusiaukampinei, kampo kraštines kerta taškuose M ir N. Įrodykite, kad trikampis AMN — lygiašonis.

133. Jei trikampio pusiaukampinė sutampa su jo aukštine, tai trikampis — lygiašonis. Įrodykite.

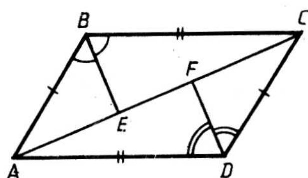
134. Jei vieno lygiašonio trikampio pagrindas ir prie jo esantis kampas atitinkamai lygūs kito lygiašonio trikampio pagrindui ir prie jo esančiam kampui, tai tie lygiašoniai trikampiai lygūs. Įrodykite.

135. Jei vieno lygiakraščio trikampio kraštinė lygi kito lygiakraščio trikampio kraštinei, tai tie lygiakraščiai trikampiai lygūs. Įrodykite.

136. 52 paveiksle $AB = AC$, $BD = DC$ ir $\angle BAC = 50°$. Raskite $\angle CAD$.



75 pav.



76 pav.

137. 53 paveiksle $BC=AD$, $AB=CD$. Įrodykite, kad $\angle B=\angle D$.

138. 75 paveiksle $AB=CD$ ir $BD=AC$. Įrodykite, kad: a) $\angle CAD=$ $=\angle ADB$; b) $\angle BAC=\angle CDB$.

139. 76 paveiksle $AB=CD$, $AD=BC$, BE — kampo ABC pusiaukampinė, o DF — kampo ADC pusiaukampinė. Įrodykite, kad: a) $\angle ABE=\angle ADF$; b) $\triangle ABE=\triangle CDF$.

140. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinės BM ir B_1M_1 lygios; $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

141. Atkarpos AD ir A_1D_1 — trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ pusiaukampinės, $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$ ir $AD=A_1D_1$. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

142. Lygiašonių trikampių ADC ir CBD pagrindas DC bendras. Tiesė AB atkarpą CD kerta taške O. Įrodykite, kad: a) $\angle ADB=\angle ACB$; b) $DO=OC$.

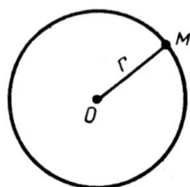
§ 4. BRĖŽIMO UŽDAVINIAI

21. Apskritimas. Sakinys, kuriuo logiškai aptariamas sąvokos turinys, vadinamas *apibrėžimù*. Apibrėžimų jau turėjome. Tai kampo, gretutinių kampų, lygiašonio trikampio ir kt. apibrėžimai. Apibrėšime dar vieną geometrinę figūrą — apskritimą.

A p i b r ė ž i m a s. ***Apskritimù vadinama geometrinė figūra, sudaryta iš visų taškų, nutolusių nuo vieno taško tuo pačiu atstumu.***

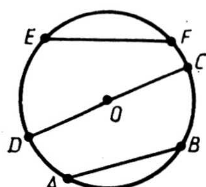
Tas taškas vadinamas apskritimo *centrù*. Atkarpa, jungianti apskritimo centrą su kuriuo nors apskritimo tašku, vadinama apskritimo *spiñduliu* (77 pav.). Iš apskritimo apibrėžimo išplaukia, kad visų jo spindulių ilgis yra toks pat.

Atkarpa, jungianti du apskritimo taškus, vadinama jo *stygà*. Styga, einanti per apskritimo centrą, vadinama jo *skeřsmeniu*.



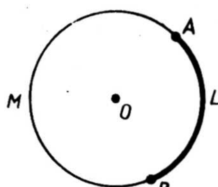
Apskritimas, kurio spindulys r, centras O

77 pav.



AB ir EF - stygos, CD - skersmuo

78 pav.



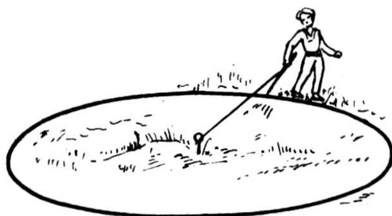
ALB ir AMB - apskritimo lankai, kurių galai A ir B

79 pav.

78 paveiksle atkarpos AB ir EF — apskritimo stygos, atkarpa CD — apskritimo skersmuo. Aišku, kad apskritimo skersmuo du kartus didesnis už jo spindulį. Apskritimo centras yra kiekvieno skersmens vidurys.

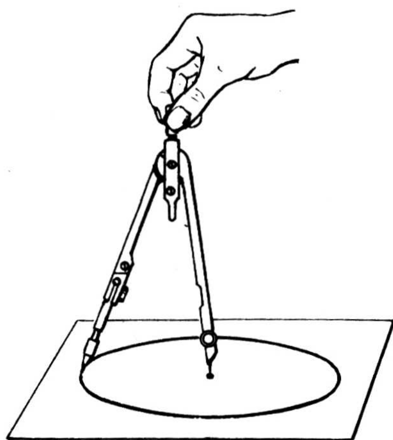
Bet kurie du apskritimo taškai apskritimą dalija į dvi dalis. Kiekviena tų dalių vadinama apskritimo *lankù*. 79 paveiksle ALB ir AMB — lankai, kuriuos riboja taškai A ir B.

Brėžinyje apskritimas brėžiamas skriestuvu (80 pav.), brėžiant jį vietovėje, galima pasinaudoti virvute (81 pav.). Apskritimo apribota plokštumos dalis vadinama *skrìtuliu* (82 pav.).



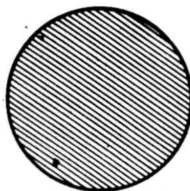
Apskritimo brėžimas su virvute

81 pav.



Apskritimo brėžimas skriestuvu

80 pav.



Skritulys

82 pav.

22. Brėžimas skriestuvu ir liniuote. Jau susidūrėme su geometriniais brėžimais: brėžėme tieses; atidėjome atkarpas, lygias duotoms atkarpoms; braižėme kampus, trikampius ir kitas figūras. Braižydami naudojomės masteline liniuote, skriestuvu, matlankiu, kampainiu. Daugelį brėžimų galima atlikti tik skriestuvu ir liniuote be padalų. Todėl geometrijoje išskiriami tie brėžimo uždaviniai, kuriuos galima išspręsti tik skriestuvu ir liniuote. Ką galima šiais įrankiais nubrėžti? Aišku, kad su liniuote galima nubrėžti bet kurią tiesę ir tiesę, einančią per du duotuosius taškus. Skriestuvu galima nubrėžti norimo spindulio apskritimą ir apskritimą, kai duotas jo centras ir jo spinduliui lygi atkarpa. Atlikdami šias nesudėtingas operacijas, galime išspręsti daug įdomių brėžimo uždavinių: nubraižyti kampą, lygų duotam kampui; per duotą tašką nubrėžti tiesę, statmeną duotajai tiesei; duotą atkarpą padalyti pusiau ir kitus uždavinius. Pradėsime nuo paprasčiausio uždavinio.

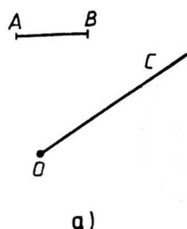
U ž d a v i n y s. *Duotame spindulyje nuo jo pradžios reikia atidėti atkarpą, lygią duotai atkarpai.*

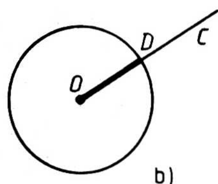
S p r e n d i m a s. Pavaizduokime uždavinio sąlygoje duotas figūras: spindulį OC ir atkarpą AB (83 pav., *a*). Skriestuvu brėžiame apskritimą, kurio centras O, spindulys AB (83 pav., *b*). Tas apskritimas spindulį OC kerta tam tikrame taške D. OD — ieškomoji atkarpa.

23. Brėžimo uždavinių pavyzdžiai

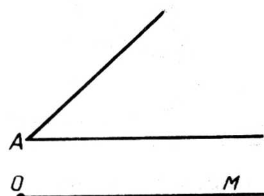
K a m p o, l y g a u s d u o t a j a m k a m p u i, b r a i ž y m a s

U ž d a v i n y s. *Nuo duotojo spindulio reikia atidėti kampą, lygų duotajam kampui.*

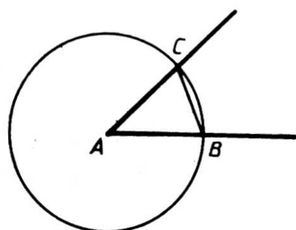


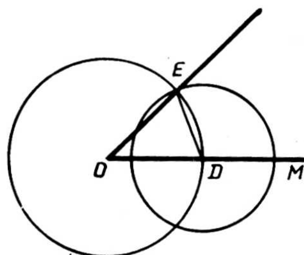


83 pav.



84 pav.



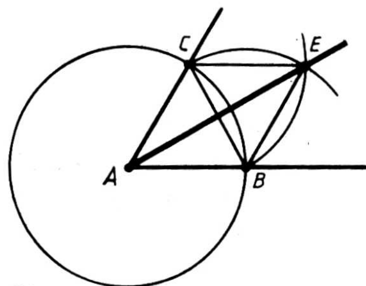


85 pav.

S p r e n d i m a s. Duotasis kampas (jo viršūnė A) ir spindulys OM pavaizduoti 84 paveiksle. Reikia nubraižyti kampą, lygų kampui A, kad nubraižytojo kampo viena kraštinė būtų spindulys OM.

Nubrėžkime bet kokio spindulio apskritimą, kurio centras yra duotojo kampo viršūnė A. Tas apskritimas kampo kraštines kerta taškuose B ir C (85 pav., *a*). Po to brėžiame tokio pat spindulio apskritimą, kurio centras yra duotojo spindulio OM pradžia. Jis spindulį kerta taške D (85 pav., *b*). Brėžiame apskritimą, kurio centras D, o spindulys lygus atkarpai BC. Apskritimai, kurių centrai O ir D, susikerta dviejuose taškuose. Vieną iš tų taškų pažymėkime raide E. Įrodysime, kad kampas MOE — ieškomasis.

Išnagrinėkime trikampius ABC ir ODE. Atkarpos AB ir AC — apskritimo, kurio centras A, spinduliai, o OD ir OE — apskritimo, kurio centras O, spinduliai (žr. 85 pav., *b*). Kadangi tų apskritimų spinduliai lygūs (taip brėžėme), tai $AB=OD$, $AC=OE$. Remiantis brėžimu, $BC=DE$. Vadinasi, $\triangle ABC=\triangle ODE$ (pagal tris kraštines), todėl $\angle DOE=\angle BAC$, t. y. nubraižytasis kampas MOE lygus duotajam kampui A.



86 pav.

Tą patį galima padaryti ir vietovėje, vietoj skriestuvo paėmus virvutę.

K a m p o p u s i a u k a m p i n ė s b r a i ž y m a s.

U ž d a v i n y s. *Reikia nubrėžti duotojo kampo pusiaukampinę.*

S p r e n d i m a s. Nubrėžkime bet kokio spindulio apskritimą, kurio centras yra duotojo kampo viršūnė A.

Jis kerta kampo kraštines taškuose B ir C (86 pav.). Po to brėžiame du vienodo spindulio BC apskritimus, kurių centrai B ir C (paveiksle pavaizduotos tik tų apskritimų dalys). Jie susikirs dviejuose taškuose. Tą tašką, kuris yra kampo BAC viduje, pažymėkime raide E. Įrodysime, kad spindulys AE yra duotojo kampo pusiaukampinė.

Išnagrinėkime trikampius ACE ir ABE. Įrodysime, kad jie lygūs pagal tris kraštines. Kraštinė AE — bendra; kraštinės AC ir AB lygios kaip to paties apskritimo spinduliai; $CE=BE$ (taip brėžėme). Iš trikampių ACE ir ABE lygumo išplaukia, kad $\angle CAE=\angle BAE$, t. y. spindulys AE — duotojo kampo pusiaukampinė.

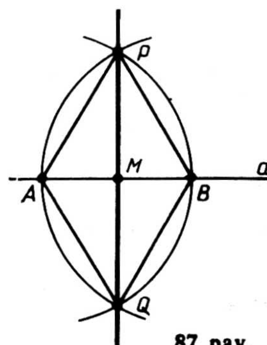
Pastaba. Ar skriestuvu ir liniuote duotąjį kampą galima padalyti į du lygius kampus? Aišku, kad galima: reikia nubrėžti to kampo pusiaukampinę. Duotą kampą galima padalyti ir į keturis lygius kampus. Tam reikia jį padalyti pusiau, o po to kiekvieną pusę padalyti pusiau. Ar skriestuvu ir liniuote duotą kampą galima padalyti į tris lygius kampus? Tas uždavinys, vadinamas *kampo trisėkcijos uždaviniu,* daug amžių traukė matematikų dėmesį. Tik XIX a. buvo įrodyta, kad bendruoju atveju kampo tais įrankiais taip padalyti negalima.

Statmenųjų tiesių braižymas

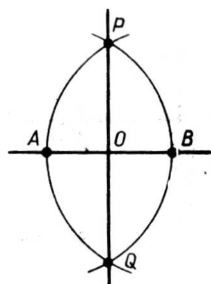
Uždavinys. *Duota tiesė ir joje pažymėtas taškas. Reikia nubrėžti tiesę, einančią per pažymėtą tašką ir statmeną duotai tiesei.*

Sprendimas. Duotos tiesės spinduliuose, išeinančiuose iš pažymėto taško M, atidėkime lygias atkarpas MA ir MB (87 pav.). Po to brėžkime du apskritimus, kurių centrai A ir B, o spindulys AB. Jie susikirs dviejuose taškuose: P ir Q. Per tašką M ir vieną iš tų taškų nubrėžkime tiesę, pavyzdžiui, tiesę MP (žr. 87 pav.). Įrodysime, kad ta tiesė yra ieškomoji.

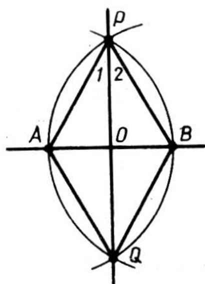
Tai išplaukia iš to, kad lygiašonio trikampio PAB pusiaukraštinė PM yra ir jo aukštinė, t. y. $PM \perp a$.



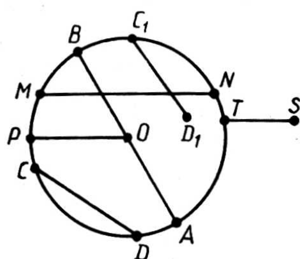
87 pav.



88 pav.



89 pav.



90 pav.

A t k a r p o s v i d u r i o b r a i ž y m a s

U ž d a v i n y s. *Reikia nubrėžti duotosios atkarpos vidurį.*

S p r e n d i m a s. Sakykime, AB — duota atkarpa. Nubrėžkime du apskritimus, kurių centrai A ir B, o spindulys AB (88 pav.). Jie susikerta taškuose P ir Q. Nubrėžkime tiesę PQ. Tos tiesės ir atkarpos AB susikirtimo taškas ir yra ieškomasis atkarpos AB vidurys. Įrodysime.

Trikampiai APQ ir BPQ lygūs pagal tris kraštines, todėl $\angle 1 = \angle 2$ (89 pav.). Vadinasi, atkarpa PO — lygiašonio trikampio APB pusiaukampinė, taigi ir pusiaukraštinė, t. y. taškas O — atkarpos AB vidurys.

Klausimai ir uždaviniai

143. Kurios iš 90 paveiksle pavaizduotų atkarpų yra: a) apskritimo stygos; b) apskritimo skersmenys; c) apskritimo spinduliai?

144. Atkarpos AB ir CD — apskritimo skersmenys. Įrodykite, kad: a) stygos BD ir AC lygios; b) stygos AD ir BC lygios; c) $\angle BAD = \angle BCD$.

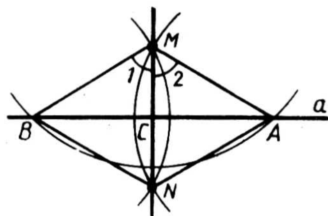
145. Atkarpa MK — apskritimo, kurio centras O, skersmuo, o MP ir PK — lygios to apskritimo stygos. Raskite $\angle POM$.

146. Atkarpos AB ir CD — apskritimo, kurio centras O, skersmenys. Raskite trikampio AOD perimetrą, kai $CB = 13$ cm, $AB = 16$ cm.

147. Apskritimo, kurio centras O, taškai A ir B yra tose vietose, kad kampas AOB būtų statusis. Atkarpa BC — apskritimo skersmuo. Įrodykite, kad stygos AB ir AC lygios.

148. Tiesėje pažymėti taškai A ir B. Spindulio BA tęsinyje atidėkite tokią atkarpą BC, kad $BC = 2AB$.

149. Duota tiesė a, joje nesantis taškas B ir atkarpa PQ. Nubrėžkite tiesės a tašką M, kad $BM=PQ$. Ar visada uždavinys turi sprendinį?



91 pav.

150. Duotas apskritimas, jame nesantis taškas A ir atkarpa PQ. Nubrėžkite apskritimo tašką M, kad $AM=PQ$. Ar visada uždavinys turi sprendinį?

151. Duotas smailusis kampas BAC ir spindulys XY. Nubraižykite tokį kampą YXZ, kad $\angle YXZ=2\angle BAC$.

152. Duotas bukasis kampas AOB. Nubrėžkite tokį spindulį OX, kad kampai XOA ir XOB būtų lygūs bukieji kampai.

153. Duota tiesė a ir joje nesantis taškas M. Nubrėžkite tiesę, einančią per tašką M ir statmeną tiesei a.

Sprendimas. Brėžiame apskritimą, kurio centras M ir kuris kerta tiesę a dviejuose taškuose; tuos taškus pažymėkime raidėmis A ir B (91 pav.). Po to brėžiame per tašką M einančius apskritimus, kurių centrai A ir B. Tie apskritimai susikerta ne tik taške M, bet ir kitame taške — taške N. Nubrėžiame tiesę MN. Įrodysime, kad ta tiesė yra ieškomoji. Trikampiai AMN ir BMN lygūs pagal tris kraštines, todėl $\angle 1=\angle 2$. Iš to išplaukia, kad atkarpa MC (C — tiesių a ir MN susikirtimo taškas) yra lygiašonio trikampio AMB pusiaukampinė, taigi ir aukštinė, t. y. $MN \perp AB$.

154. Duotas trikampis ABC. Nubrėžkite: a) pusiaukampinę AK; b) pusiaukraštinę BM; c) aukštinę CH.

155. Skriestuvu ir liniuote nubraižykite kampą, lygų: a) $45°$; b) $22°30'$.

II SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Paaiškinkite, kokia figūra vadinama trikampiu. Nubraižykite trikampį, parodykite jo kraštines, viršūnes ir kampus. Kas yra trikampio perimetras?
2. Kokie trikampiai vadinami lygiais?
3. Kas yra teorema ir jos įrodymas?
4. Suformuluokite ir įrodykite teoremą, išreiškiančią pirmąjį trikampių lygumo požymį.
5. Paaiškinkite, kokia atkarpa vadinama statmeniu, nubrėžtu iš taško į tiesę.

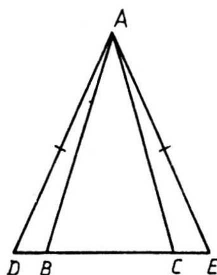
6. Suformuluokite ir įrodykite statmens, nuleisto iš taško į tiesę, teoremą.
7. Kokia atkarpa vadinama trikampio pusiaukraštine? Kiek pusiaukraštinių turi trikampis?
8. Kokia atkarpa vadinama trikampio pusiaukampine? Kiek pusiaukampinių turi trikampis?
9. Kokia atkarpa vadinama trikampio aukštine? Kiek aukštinių turi trikampis?
10. Koks trikampis vadinamas lygiašoniu? Kaip vadinamos lygiašonio trikampio kraštinės?
11. Koks trikampis vadinamas lygiakraščiu?
12. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.
13. Suformuluokite ir įrodykite lygiašonio trikampio pusiaukampinės teoremą.
14. Suformuluokite ir įrodykite teoremą, išreiškiančią antrąjį trikampių lygumo požymį.
15. Suformuluokite ir įrodykite teoremą, išreiškiančią trečiąjį trikampių lygumo požymį.
16. Kas yra apibrėžimas? Pasakykite apskritimo apibrėžimą. Kas yra apskritimo centras, spindulys, styga ir skersmuo?
17. Paaiškinkite, kaip duotame spindulyje nuo jo pradžios atidedama duotai atkarpai lygi atkarpa.
18. Paaiškinkite, kaip nuo duoto spindulio atidedamas duotam kampui lygus kampas.
19. Paaiškinkite, kaip brėžiama kampo pusiaukampinė.
20. Paaiškinkite, kaip braižoma einanti per duotos tiesės tašką ir jai statmena tiesė.
21. Paaiškinkite, kaip braižomas atkarpos vidurys.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

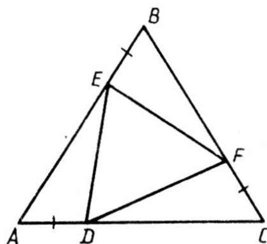
156. Trikampio ABC perimetras lygus 15 cm. Kraštinė BC 2 cm ilgesnė už kraštinę AB, o kraštinė AB 1 cm trumpesnė už kraštinę AC. Raskite trikampio kraštines.

157. Lygiašonio trikampio pagrindas 2 cm ilgesnis už šoninę kraštinę, bet 3 cm trumpesnis už šoninių kraštinių sumą. Raskite trikampio kraštines.

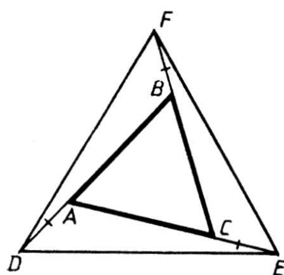
158. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 8 cm. Pusiaukraštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę, trikampį dalija į du trikampius,



92 pav.



93 pav.



94 pav.

kurių vieno perimetras 2 cm didesnis už kito. Raskite nagrinėjamo trikampio šoninę kraštinę.

159. Jei vieno lygiašonio trikampio šoninė kraštinė ir kampas, esantis prieš pagrindą, lygūs kito lygiašonio trikampio šoninei kraštinei ir kampui, esančiam prieš pagrindą, tai tie lygiašoniai trikampiai lygūs. Įrodykite.

160. Tiesė a eina per atkarpos AB vidurį ir statmena tai atkarpai. Įrodykite, kad: a) kiekvienas tiesės a taškas vienodai nutolęs nuo taškų A ir B; b) kiekvienas taškas, vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, yra tiesėje a.

161. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinės AM ir A_1M_1 lygios, $BC=B_1C_1$ ir $\angle AMB=\angle A_1M_1B_1$. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

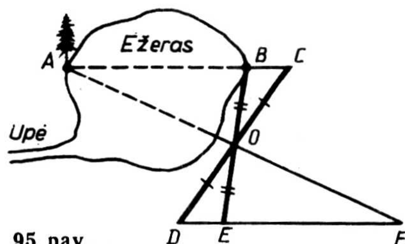
162. 92 paveiksle trikampis ADE lygiašonis, DE — pagrindas. Įrodykite: a) jei $BD=CE$, tai $\angle CAD=\angle BAE$ ir $AB=AC$; b) jei $\angle CAD=\angle BAE$, tai $BD=CE$ ir $AB=AC$.

163. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio kraštinių vidurio taškai yra kito lygiašonio trikampio viršūnės.

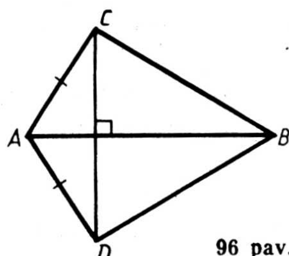
164. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėse lygios atkarpos AD, BE ir CF atidėtos taip, kaip parodyta 93 paveiksle. Taškai D, E, F sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad trikampis DEF — lygiakraštis.

165. Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, kuris yra abiejų atkarpų vidurys. Atkarpose AC ir BD pažymėti taškai K ir K_1; $AK=BK_1$. Įrodykite, kad: a) $OK=OK_1$; b) taškas O yra tiesėje KK_1.

166. Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, kuris yra abiejų atkarpų vidurys; M ir N — atkarpų AC ir BD vidurio taškai. Įrodykite, kad taškas O — atkarpos MN vidurys.



95 pav.



96 pav.

167. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinės pratęstos taip, kaip parodyta 94 paveiksle. Atkarpos AD, CE, BF lygios. Įrodykite, kad trikampis DEF — lygiakraštis.

168. Trikampio ABC $\angle A=38°$, $\angle B=110°$, $\angle C=32°$. Kraštinėje AC pažymėti taškai D ir E. Taškas D yra atkarpoje AE, $BD=DA$, $BE=EC$. Raskite $\angle DBE$.

169. 95 paveiksle $OC=OD$, $OB=OE$. Įrodykite, kad $AB=EF$. Paaiškinkite šiuo uždaviniu paremtą ežero pločio (95 paveikslo atkarpos AB) radimo būdą.

170. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs, jei $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AD=A_1D_1$; čia AD ir A_1D_1 — trikampių pusiaukampinės.

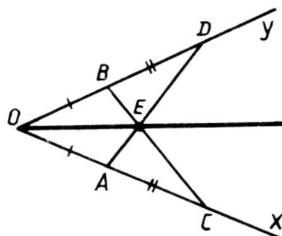
171. Trikampių ABC ir ADC kraštinės BC ir AD lygios ir susikerta taške O, $\angle OAC=\angle OCA$. Įrodykite, kad trikampiai ABO ir CDO lygūs.

172. 96 paveiksle $AC=AD$, $AB\perp CD$. Įrodykite, kad $BC=BD$ ir $\angle ACB=\angle ADB$.

173*. Įrodykite, kad trikampio kampui gretutinis kampas didesnis už kiekvieną iš kitų dviejų trikampio kampų.

174*. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, jei $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BC=B_1C_1$.

175*. Kampo XOY kraštinėse pažymėti taškai A, B, C ir D; be to, $OA=OB$, $AC=BD$ (97 pav.). Tiesės AD ir BC susikerta taške E. Įrodykite, kad spindulys OE — kampo XOY pusiaukampinė. Remdamiesi šiuo uždaviniu aprašykite kampo pusiaukampinės brėžimo būdą.



97 pav.

176*. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs, jei $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $AM=A_1M_1$; čia AM ir A_1M_1 — trikampių pusiaukraštinės.

177*. Nagrinėjami du trikampiai: ABC ir $A_1B_1C_1$. Jų $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti taškai K ir L, o trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinėse A_1C_1 ir B_1C_1 taškai K_1 ir L_1; be to, $AK=A_1K_1$, $LC=L_1C_1$. Įrodykite, kad: a) $KL=K_1L_1$; b) $AL=A_1L_1$.

178*. Taškai A, B, C yra vienoje tiesėje, o taškas D nėra toje tiesėje. Įrodykite, kad bent dvi iš trijų atkarpų AD, BD ir CD nelygios viena kitai.

179*. Lygiašonio trikampio ABC šoninėse kraštinėse AB ir AC pažymėti tokie taškai P ir Q, kad $\angle PXB=\angle QXC$; čia X — pagrindo BC vidurys. Įrodykite, kad $BQ=CP$.

180. Nubrėžkite duoto spindulio apskritimą, kuris eitų per duotą tašką, o jo centras būtų tiesėje.

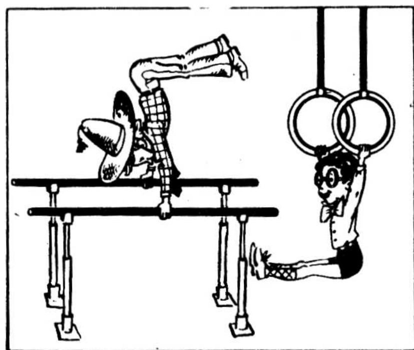
181. Nubrėžkite duoto spindulio apskritimą, einantį per du duotus taškus.

182. Duota tiesė a, taškai A, B ir atkarpa PQ. Nubraižykite tokį trikampį ABC, kad jo viršūnė C būtų tiesėje a ir $AC=PQ$.

183. Duotas apskritimas, taškai A, B ir atkarpa PQ. Nubraižykite tokį trikampį ABC, kad viršūnė C būtų duotajame apskritime ir $AC=PQ$.

184. Nubrėžkite trikampio ABC kraštinės BC tašką, vienodai nutolusį nuo viršūnių A ir C.

185. Skriestuvu ir liniuote duotą atkarpą padalykite į keturias lygias dalis.



III skyrius

LYGIAGREČIOSIOS TIESĖS

§ 1. DVIEJŲ TIESIŲ LYGIAGRETUMO POŽYMIAI

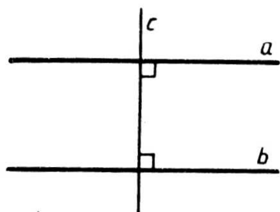
24. Lygiagrečių tiesių apibrėžimas. 1 skyrelyje pabrėžėme, kad dvi tiesės arba turi vieną bendrą tašką, t. y. susikerta, arba neturi nė vieno bendro taško, t. y. nesusikerta.

A p i b r ė ž i m a s. *Dvi plokštumos tiesės, kurios nesusikerta, vadinamos lygiagrečiõsiomis.*

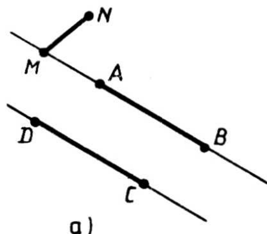
Tiesių a ir b lygiagretumas žymimas šitaip: $a \parallel b$.

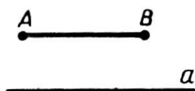
98 paveiksle pavaizduotos tiesės a ir b, statmenos tiesei c. 12 skyrelyje įsitikinome, kad tokios tiesės a ir b nesusikerta, t. y. jos lygiagrečios.

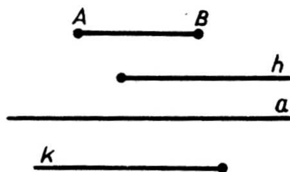
Dažnai nagrinėjamos ir lygiagrečiosios atkarpos. Dvi atkarpos, kurios yra lygiagrečiose tiesėse, vadinamos *lygiagrečiõsiomis*. 99 paveiksle, *a*, atkarpos AB ir CD lygiagrečios ($AB \parallel CD$), o atkarpos MN ir CD nelygiagrečios. Panašiai apibrėžiamas atkarpos ir tiesės lygiagretumas (99 pav., *b*), spindulio ir tiesės, atkarpos ir spindulio, dviejų spindulių lygiagretumas (99 pav., *c*).



98 pav.

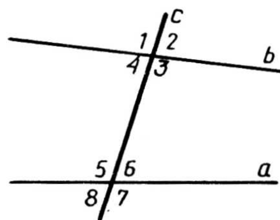






99 pav.

25. Dviejų tiesių lygiagretumo požymiai. Tiesė c, kuri kerta tieses a ir b dviejuose taškuose (100 pav.), vadinama tiesių a ir b *kirstinė*. Perkirtus tieses a ir b kirstine c, gaunami aštuoni kampai, kurie 100 paveiksle pažymėti skaičiais. Tam tikros tų kampų poros turi specialius pavadinimus:



100 pav.

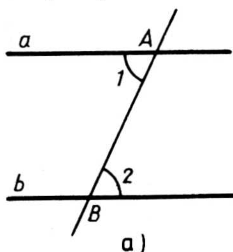
priešiniai kampai: *3* ir *5*, *4* ir *6*;
vienašaliai kampai: *4* ir *5*, *3* ir *6*;
atitinkamieji kampai *1* ir *5*, *4* ir *8*, *2* ir *6*, *3* ir *7*.

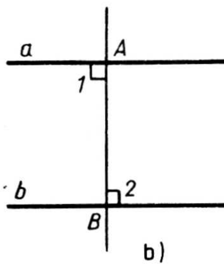
Išnagrinėsime tris su tomis kampų poromis susijusius dviejų tiesių lygiagretumo požymius.

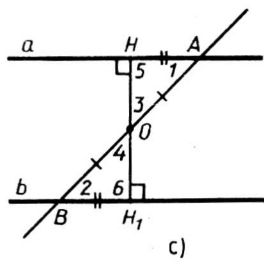
Teorema. ***Jei dvi tieses perkirtus kirstine gaunami priešiniai kampai yra lygūs, tai tiesės lygiagrečios.***

Įrodymas. Sakykime, tieses a ir b perkirtus kirstine AB gauti lygūs priešiniai kampai: $\angle 1 = \angle 2$ (101 pav., a). Įrodysime, kad $a \parallel b$.

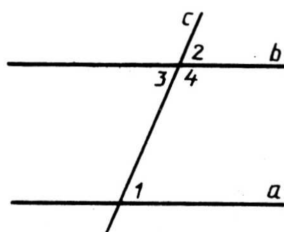
Jei kampai *1* ir *2* statieji (101 pav., b), tai tiesės a ir b statmenos tiesei AB, todėl jos lygiagrečios. Išnagrinėsime atvejį, kai kampai *1* ir *2* nestatieji. Iš atkarpos AB vidurio O nubrėžkime statmenį OH į tiesę a (101 pav., c). Tiesėje b nuo taško B atidėkime atkarpą BH_1, lygią atkarpai AH, kaip parodyta 101 paveiksle, c. Nubrėžkime atkarpą OH_1. Trikampiai OHA ir OH_1B lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), todėl $\angle 3 = \angle 4$ ir $\angle 5 = \angle 6$. Iš lygybės $\angle 3 = \angle 4$ išplaukia, kad taškas H_1 yra spindulio OH tęsinyje, t. y. taškai H, O ir H_1 yra vienoje tiesėje, o iš lygybės $\angle 5 = \angle 6$ išplaukia, kad kampas *6* — statusis (kadangi kampas *5* — statusis). Vadinasi, tiesės a ir b statmenos tiesei HH_1, todėl jos lygiagrečios. Teorema įrodyta.







101 pav.



102 pav.

Teorema. ***Jei dvi tieses perkirtus kirstine gaunami atitinkamieji kampai yra lygūs, tai tiesės lygiagrečios.***

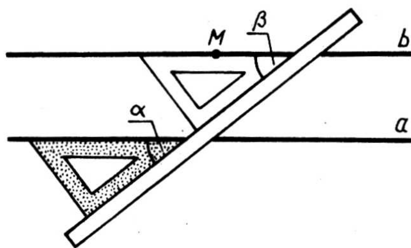
Įrodymas. Sakykime, tieses *a* ir *b* perkirtus kirstine *c*, gauti lygūs atitinkamieji kampai, pavyzdžiui, $\angle 1 = \angle 2$ (102 pav.). Kadangi kampai *2* ir *3* — kryžminiai, tai $\angle 2 = \angle 3$. Iš tų dviejų lygybių išplaukia, kad $\angle 1 = \angle 3$. Tačiau kampai *1* ir *3* — priešiniai kampai, todėl tiesės *a* ir *b* lygiagrečios. Teorema įrodyta.

Teorema. ***Jei dvi tieses perkirtus kirstine gaunami vienašaliai kampai, kurių suma lygi* 180°, *tai tiesės lygiagrečios.***

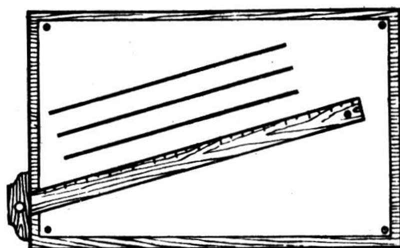
Įrodymas. Sakykime, tieses *a* ir *b* perkirtus kirstine *c*, gauti vienašaliai kampai, kurių suma lygi 180°, pavyzdžiui, $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (žr. 102 pav.). Kadangi kampai *3* ir *4* — gretutiniai, tai $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Iš tų dviejų lygybių išplaukia, kad priešiniai kampai *1* ir *3* lygūs, todėl tiesės *a* ir *b* lygiagrečios. Teorema įrodyta.

26. Praktiniai lygiagrečiųjų tiesių brėžimo būdai. Tiesių lygiagretumo požymiais remiamasi brėžiant lygiagrečias tieses su praktikoje naudojamais įrankiais. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, lygiagrečių tiesių brėžimą su kampainiu ir liniuote.

Norėdami nubrėžti tiesę, einančią per tašką *M* ir lygiagrečią duotai tiesei *a*, kampainį prie tiesės *a* ir liniuotę prie jo pridėkime taip, kaip parodyta 103 paveiksle. Po to kampainį stumkime išilgai liniuotės tol, kol kampainio kraštinė eis per tašką *M*, ir brėžkime tiesę *b*. Tiesės *a* ir *b* lygiagrečios, nes 103 paveiksle raidėmis α ir β[1] pažymėti atitinkamieji kampai lygūs.



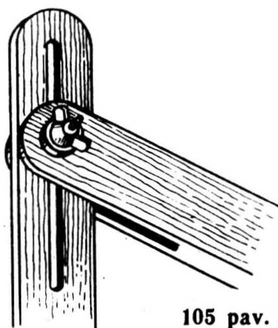
103 pav.


104 pav.

[1] α ir β — graikų raidės alfa ir beta.

104 paveiksle parodyta, kaip lygiagrečios tiesės brėžiamos *reišinà*. Taip daroma braižyboje.

Panašiai daro staliai, lygiagrečioms tiesėms žymėti naudodami *skečiamąjį kampainį* (dvi šarnyriškai sujungtas medines lenteles; 105 pav.).


105 pav.

Klausimai ir uždaviniai

186. 106 paveiksle tiesės a ir b perkirstos tiese c. Įrodykite, kad $a \parallel b$, kai: a) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$; b) $\angle 1 = \angle 6$; c) $\angle 1 = 45°$, o kampas *7* tris kartus didesnis už kampą *3*.

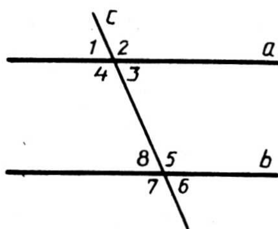
187. Remdamiesi 107 paveikslo duomenimis įrodykite, kad $AB \parallel DE$.

188. Atkarpų AB ir CD susikirtimo taškas yra kiekvienos jų vidurys. Įrodykite, kad tiesės AC ir BD lygiagrečios.

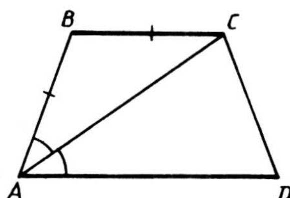
189. Remdamiesi 108 paveikslo duomenimis įrodykite, kad $BC \parallel AD$.

190. 109 paveiksle $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Įrodykite, kad $DE \parallel AC$.

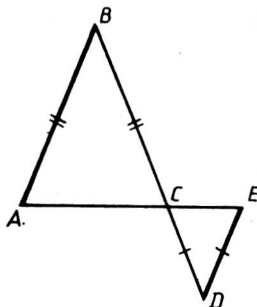
191. Atkarpa BK — trikampio ABC pusiaukampinė. Per tašką K nubrėžta tiesė kerta kraštinę BC taške M, be to, $BM = MK$. Įrodykite, kad $KM \parallel AB$.



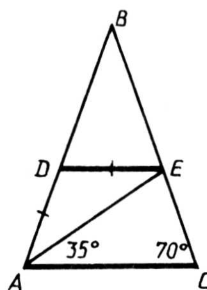
106 pav.



108 pav.



107 pav.



109 pav.

192. Trikampio ABC kampas A lygus 40°, o kampui ACB gretutinis kampas BCE lygus 80°. Įrodykite, kad kampo BCE pusiaukampinė lygiagreti tiesei AB.

193. Trikampio ABC $\angle A=40°$, $\angle B=70°$. Per viršūnę B nubrėžta tokia tiesė BD, kad spindulys BC — kampo ABD pusiaukampinė. Įrodykite, kad $AC \parallel BD$.

194. Nubraižykite trikampį ABD. Per kiekvieną to trikampio viršūnę su kampainiu ir liniuote nubrėžkite tiesę, lygiagrečią prieš ją esančiai kraštinei.

195. Nubraižykite trikampį ABC ir jo kraštinėje AC pažymėkite tašką D. Per tašką D su kampainiu ir liniuote nubrėžkite tieses, lygiagrečias kitoms dviem trikampio kraštinėms.

§ 2. LYGIAGREČIŲJŲ TIESIŲ AKSIOMA

27. Apie geometrijos aksiomas. Nagrinėdami geometrinių figūrų savybes jau įrodėme nemaža teoremų. Įrodydami dažniausiai rėmėmės jau įrodytomis teoremomis. O kuo pagrįsti pačių pirmųjų geometrijos teoremų įrodymai? Atsakome į klausimą šitaip: kai kurie teiginiai apie geometrinių figūrų savybes priimami be įrodymo kaip pradiniai teiginiai; jais remiantis įrodomos teoremos ir apskritai kuriama visa geometrija. Tokie pradiniai teiginiai vadinami *aksiòmomis*.

Kelios aksiomos buvo suformuluotos I skyriuje (nors jų ir nevadinome aksiomomis). Pavyzdžiui, aksioma yra teiginys *per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti tiesę, tačiau tik vieną*. Samprotaudami faktiškai rėmėmės ir kitomis aksiomomis. Pavyzdžiui, dvi atkarpas lyginome uždėdami vieną atkarpą ant kitos. Toks palyginimas išplaukia iš aksiomos: *kiekviename spindulyje nuo jo pradžios galima atidėti duotai atkarpai lygią atkarpą, tačiau tik vieną*. Panašia aksioma pagrįstas dviejų kampų palyginimas: *nuo kiekvieno spindulio į nurodytą pusę galima atidėti duotajam neištiestiniam kampui lygų kampą, tačiau tik vieną*.

Visos tos aksiomos akivaizdžios, nekelia abejonių. Pats žodis „aksioma“ (axioma) graikų kalba reiškia savaime suprantamą tiesą, įrodymų nereikalingą teiginį. Visas šiame geometrijos kurse priimtų planimetrijos aksiomų sąrašas pateiktas vadovėlio gale.

Toks požiūris į geometriją (kai iš pradžių formuluojami pradiniai teiginiai — aksiomos, po to remiantis jomis, loginiais samprotavimais, įrodomi kiti teiginiai) atsirado gilioje senovėje ir

buvo išdėstytas senovės graikų mokslininko Euklido (apie 365—300 m. pr. Kr.) garsiajame veikale „Pradmenys". Kai kurios Euklido aksiomos (dalį jų jis vadino *postulãtais*) pateiktos ir dabartiniame geometrijos kurse. „Pradmenyse" išdėstyta geometrija vadinama *euklìdine geomètrija.*

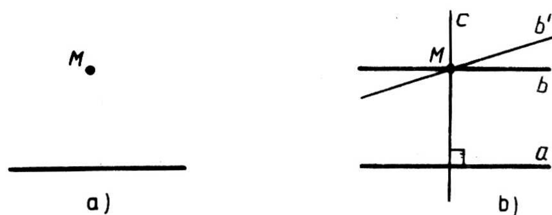


Euklidas (III a. pr. Kr.)

Dabar susipažinsime su viena žinomiausių geometrijos aksiomų.

28. Lygiagrečiųjų tiesių aksioma. Išnagrinėkime bet kurią tiesę a ir joje nesantį tašką M (110 pav., a). Įrodysime, kad per tašką M galima nubrėžti tiesę, lygiagrečią tiesei a. Tam per tašką M nubrėžkime dvi tieses: iš pradžių tiesę c, statmeną tiesei a, po to tiesę b, statmeną tiesei c (110 pav., b). Kadangi tiesės a ir b statmenos tiesei c, tai jos lygiagrečios.

Taigi per tašką M eina tiesė b, lygiagreti tiesei a. Kyla šitoks klausimas: ar per tašką M galima nubrėžti dar vieną tiesę, lygiagrečią tiesei a? Atrodytų, kad tiesė b, „pasukta" net labai mažu kampu apie tašką M, kirs tiesę a (110 pav., b, tiesė b'). Kitais žodžiais tariant, mums atrodo, kad per tašką M negalima nubrėžti kitos tiesės (nesutampančios su b), lygiagrečios tiesei a. Ar tą teiginį galima įrodyti? Šis klausimas iškilo labai seniai. Euklido „Pradmenyse" yra postulatas (penktasis Euklido postulatas), iš kurio išplaukia, kad per tiesėje nesantį tašką galima nubrėžti tik vieną tai tiesei lygiagrečią tiesę. Daug matematikų nuo seno bandė įrodyti penktąjį Euklido postulatą, t. y. jį išvesti iš kitų aksiomų. Tačiau tos pastangos buvo nesėkmingos. Tik XIX a. buvo galutinai išaiškinta, kad teiginio, jog tiesė, einanti per duotą tašką ir lygiagreti duotai tiesei yra tik viena, negalima įrodyti remian-



110 pav.



N. Lobačevskis
(1792—1856)

tis kitomis Euklido aksiomomis, kad toks teiginys yra aksioma. Didelę įtaką sprendžiant šį uždavinį turėjo rusų matematikas Nikolajus Lobačevskis (1792—1856).

Taigi dar vienu iš pradinių teiginių laikysime *lygiagrečiųjų tiesių aksiomą*. *Per tašką, nesantį tiesėje, eina tik viena tai tiesei lygiagreti tiesė.*

Teiginiai, kurie išvedami tiesiog iš aksiomų ar teoremų, vadinami *išvadomis*. Išnagrinėsime keletą lygiagrečiųjų tiesių aksiomos išvadų.

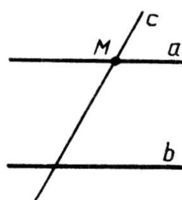
1°. *Jei tiesė kerta vieną iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai ji kerta ir kitą.*

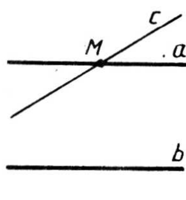
Sakykime, tiesės *a* ir *b* lygiagrečios, tiesė *c* kerta tiesę *a* taške *M* (111 pav., *a*). Įrodysime, kad tiesė *c* kerta ir tiesę *b*. Jei tiesė *c* nekirstų tiesės *b*, tai per tašką *M* eitų dvi tiesės (tiesės *a* ir *c*), lygiagrečios tiesei *b* (111 pav., *b*). Tačiau tai prieštarauja lygiagrečiųjų tiesių aksiomai. Vadinasi, tiesė *c* kerta tiesę *b*.

2°. *Jei dvi tiesės lygiagrečios trečiai tiesei, tai jos lygiagrečios.*

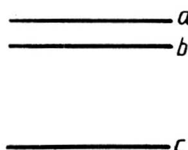
Sakykime, tiesės *a* ir *b* lygiagrečios tiesei *c* (112 pav., *a*). Įrodysime, kad $a \parallel b$. Tarkime, kad tiesės *a* ir *b* nelygiagrečios, t. y. susikerta tam tikrame taške *M* (112 pav., *b*). Tada per tašką *M* eina dvi tiesės (tiesės *a* ir *b*), lygiagrečios tiesei *c*. Tačiau tai prieštarauja lygiagrečiųjų tiesių aksiomai. Vadinasi, prielaida neteisinga, todėl tiesės *a* ir *b* lygiagrečios.

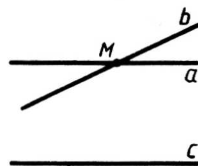
29. Kampų, gautų perkirtus dvi lygiagrečias tieses kirstine, teoremos. Kiekvienoje teoremoje skiriamos dvi dalys: *sąlyga* ir





111 pav.





112 pav.

išvada. Teoremos sąlyga — tai, kas duota; teoremos išvada — tai, ką reikia įrodyti.

Pavyzdžiui išnagrinėkime teoremą, išreiškiančią dviejų tiesių lygiagretumo požymį: jei perkirtus dvi tieses kirstine gaunami priešiniai kampai yra lygūs, tai tiesės lygiagrečios. Šios teoremos sąlyga yra pirmoji teiginio dalis: „perkirtus dvi tieses kirstine gaunami priešiniai kampai yra lygūs" (tai duota), o išvada — antroji dalis: „tiesės lygiagrečios" (tai reikia įrodyti).

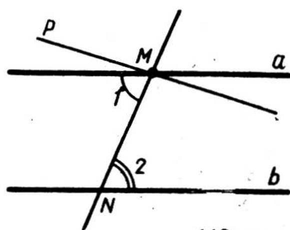
Duotos teoremos *atvirkštinė teoremà* vadinama tokia teorema, kurios sąlyga yra duotos teoremos išvada, o išvada — duotos teoremos sąlyga. Įrodysime 25 skyrelio teoremų atvirkštines teoremas.

Teorema. ***Jei dvi lygiagrečios tiesės perkirstos kirstine, tai gauti priešiniai kampai yra lygūs.***

Įrodymas. Sakykime, lygiagrečios tiesės a ir b perkirstos kirstine MN. Įrodysime, kad priešiniai kampai, pavyzdžiui, 1 ir 2, lygūs (113 pav.). Tarkime, kad kampai 1 ir 2 nelygūs. Nuo spindulio MN kampą PMN, lygų kampui 2, atidėkime taip, kad $\angle PMN$ ir $\angle 2$ būtų priešiniai kampai, gauti tieses MP ir b perkirtus kirstine MN. Remiantis brėžimu, tie priešiniai kampai lygūs, todėl $MP \parallel b$. Gavome, kad per tašką M eina dvi tiesės (tiesės a ir MP), lygiagrečios tiesei b. Tačiau tai prieštarauja lygiagrečių tiesių aksiomai. Vadinasi, prielaida neteisinga, taigi $\angle 1 = \angle 2$. Teorema įrodyta.

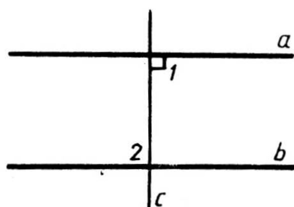
Pastaba. Įrodydami šią teoremą taikėme samprotavimo metodą, kuris vadinamas *prieštaros metodù*. Tarėme, kad priešiniai kampai 1 ir 2, gauti perkirtus lygiagrečias tieses a ir b kirstine MN, nelygūs, t. y. padarėme prielaidą, priešingą tam, ką reikia įrodyti. Samprotaudami rėmėmės ta prielaida ir gavome prieštarą lygiagrečiųjų tiesių aksiomai. Todėl prielaida neteisinga, taigi $\angle 1 = \angle 2$.

Toks samprotavimo metodas matematikoje taikomas dažnai. Jį taikėme ir anksčiau, pavyzdžiui, 12 skyrelyje, įrodydami, kad dvi tiesės, statmenos trečiai, nesusikerta. Tą patį metodą taikėme ir 28 skyrelyje, įrodydami ly-



113 pav.

giagrečiųjų tiesių aksiomos 1^0 ir 2^0 išvadas.



114 pav.

Išvada. *Jei tiesė statmena vienai iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai ji statmena ir kitai.*

Įrodysime. Sakykime, $a \parallel b$ ir $c \perp a$, t. y. $\angle 1 = 90°$ (114 pav.). Tiesė c kerta tiesę a, todėl ji kerta ir tiesę b. Lygiagrečias tieses a ir b perkirtus kirstine c gaunami lygūs priešiniai kampai: $\angle 1 = \angle 2$. Kadangi $\angle 1 = 90°$, tai ir $\angle 2 = 90°$, t. y. $c \perp b$, ką ir reikėjo įrodyti.

Teorema. ***Jei dvi lygiagrečios tiesės perkirstos kirstine, tai gauti atitinkamieji kampai yra lygūs.***

Įrodymas. Sakykime, lygiagrečiosios tiesės a ir b perkirstos kirstine c. Įrodysime, kad atitinkamieji kampai, pavyzdžiui, *1* ir *2*, lygūs (žr. 102 pav.). Kadangi $a \parallel b$, tai priešiniai kampai *1* ir *3* lygūs. Kadangi kampai *2* ir *3* kryžminiai, tai jie lygūs. Iš lygybių $\angle 1 = \angle 3$ ir $\angle 2 = \angle 3$ išplaukia, kad $\angle 1 = \angle 2$. Teorema įrodyta.

Teorema. ***Jei dvi lygiagrečios tiesės perkirstos kirstine, tai gautų vienašalių kampų suma lygi* 180°.**

Įrodymas. Sakykime, lygiagrečios tiesės a ir b perkirstos kirstine c (žr. 102 pav.). Įrodysime, pavyzdžiui, kad $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Kadangi $a \parallel b$, tai atitinkamieji kampai *1* ir *2* lygūs. Kampai *2* ir *4* gretutiniai, todėl $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Iš lygybių $\angle 1 = \angle 2$ ir $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ išplaukia, kad $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Teorema įrodyta.

Pastaba. Jei įrodėme kurią nors teoremą, tai iš to dar neišplaukia, kad teisingas atvirkštinis teiginys. Dar daugiau, atvirkštinis teiginys ne visada teisingas. Pateiksime paprastą pavyzdį. Žinome: jei kampai kryžminiai, tai jie lygūs. Atvirkštinis teiginys „jei kampai lygūs, tai jie kryžminiai“, aišku, neteisingas.

196. Duotas trikampis ABC. Kiek tiesių, lygiagrečių kraštinei AB, galima nubrėžti per viršūnę C?

197. Per tašką, nesantį tiesėje p, nubrėžtos keturios tiesės. Kiek iš tų tiesių kerta tiesę p? Išnagrinėkite galimus atvejus.

198. Tiesės a ir b statmenos tiesei p, tiesė c kerta tiesę a. Ar tiesė c kerta tiesę b?

199. Tiesė p lygiagreti trikampio ABC kraštinei AB. Įrodykite, kad tiesės BC ir AC kerta tiesę p.

200. 115 paveiksle $AD \parallel p$ ir $PQ \parallel BC$. Įrodykite, kad tiesė p kerta tieses AB, AE, AC, BC ir PQ.

201. Priešinių kampų, gautų dvi lygiagrečias tieses perkirtus kirstine, suma lygi 210°. Raskite tuos kampus.

202. 116 paveiksle tiesės a, b ir c perkirstos kirstine d, $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$. Kurios iš tiesių a, b ir c lygiagrečios?

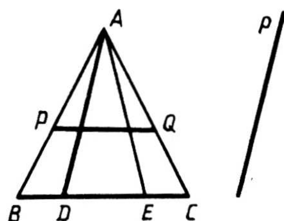
203. Raskite visus kampus, gautus dvi lygiagrečias tieses a ir b perkirtus kirstine c, kai: a) vienas iš kampų lygus 150°; b) vienas iš kampų 70° didesnis už kitą.

204. Atkarpos AB galai yra lygiagrečiose tiesėse a ir b. Tiesė, einanti per tos atkarpos vidurį O, tieses a ir b kerta taškuose C ir D. Įrodykite, kad $CO = OD$.

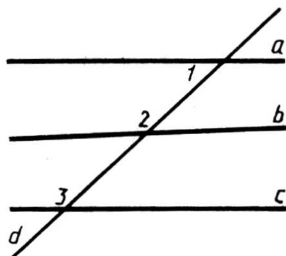
205. Remdamiesi 117 paveikslo duomenimis raskite $\angle 1$.

206. Kampas ABC lygus 70°, o kampas BCD lygus 110°. Ar tiesės AB ir CD gali būti: a) lygiagrečios; b) susikertančios?

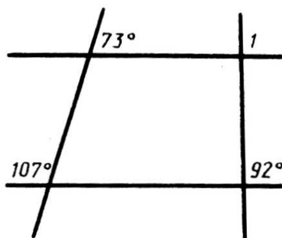
207. Atsakykite į 206 uždavinio klausimus, kai $\angle ABC = 65°$, o $\angle BCD = 105°$.



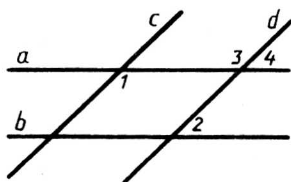
115 pav.



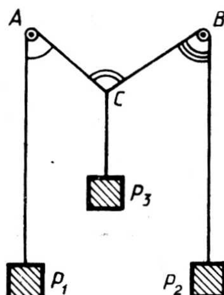
116 pav.



117 pav.



118 pav.



119 pav.

208. Dviejų vienašalių kampų, gautų dvi lygiagrečias tieses perkirtus kirstine, skirtumas lygus 50°. Raskite tuos kampus.

209. 118 paveiksle $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45°$. Raskite kampus *1*, *2* ir *3*.

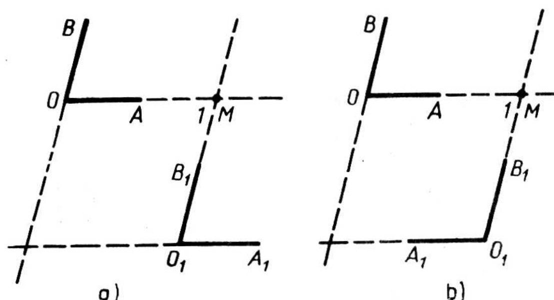
210. Siūlas permestas per skridinius A ir B (119 pav.). Prie jo galų prikabinti kūnai P_1 ir P_2. Kūnas P_3, pakabintas ant to paties siūlo taške C, balansuoja kūnus P_1 ir P_2. (Be to, $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.) Įrodykite, kad $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

211. Dvi lygiagrečios tiesės perkirstos kirstine. Įrodykite, kad:
a) priešinių kampų pusiaukampinės lygiagrečios;
b) atitinkamųjų kampų pusiaukampinės lygiagrečios;
c) vienašalių kampų pusiaukampinės viena kitai statmenos.

212. Jei vieno kampo kraštinės atitinkamai lygiagrečios kito kampo kraštinėms, tai tie kampai arba lygūs, arba jų suma lygi 180°. Įrodykite.

S p r e n d i m a s. Sakykime, AOB ir $A_1O_1B_1$ — nagrinėjami kampai ir $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Jei kampas AOB ištiestinis, tai ir kampas $A_1O_1B_1$ ištiestinis (paaiškinkite, kodėl), todėl tie kampai lygūs. Sakykime, AOB — neištiestinis kampas. Kampų AOB ir $A_1O_1B_1$ tarpusavio padėties galimi atvejai pavaizduoti 120 paveiksle. Tiesė O_1B_1 kerta tiesę O_1A_1, todėl kerta ir jai lygiagrečią tiesę OA tam tikrame taške M. Lygiagrečios tiesės OB ir O_1B_1 perkirstos kirstine OM, todėl vienas iš kampų, gautų susikirtus tiesėmis O_1B_1 ir OA (120 paveiksle, *a*, kampas *1*), lygus kampui AOB (kaip priešiniai kampai).

Lygiagrečios tiesės OA ir O_1A_1 perkirstos kirstine O_1M, todėl arba $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (120 pav., *a*), arba $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (120 pav., *b*). Iš lygybės $\angle 1 = \angle AOB$ ir dviejų paskutinių lygybių išplaukia, kad arba $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (120 pav., *a*), arba $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (120 pav., *b*), ką ir reikėjo įrodyti.



120 pav.

III SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Pasakykite lygiagrečiųjų tiesių apibrėžimą. Kokios dvi atkarpos vadinamos lygiagrečiomis?
2. Ką vadiname kirstine? Pasakykite poras kampų, kurie gaunami dvi lygiagrečias tieses perkirtus kirstine.
3. Jei dvi tieses perkirtus kirstine gaunami lygūs priešiniai kampai, tai tiesės yra lygiagrečios. Įrodykite.
4. Jei dvi tieses perkirtus kirstine gaunami lygūs atitinkamieji kampai, tai tiesės yra lygiagrečios. Įrodykite.
5. Jei dvi tieses perkirtus kirstine gaunami vienašaliai kampai, kurių suma lygi 180°, tai tiesės yra lygiagrečios. Įrodykite.
6. Papasakokite, kaip praktikoje brėžiamos lygiagrečios tiesės.
7. Paaiškinkite, kokie teiginiai vadinami aksiomomis. Pateikite aksiomų pavyzdžių.
8. Įrodykite, kad per tiesėje nesantį tašką galima nubrėžti tai tiesei lygiagrečią tiesę.
9. Suformuluokite lygiagrečiųjų tiesių aksiomą.
10. Koks teiginys vadinamas išvada? Įrodykite, kad tiesė, kertanti vieną iš dviejų lygiagrečių tiesių, kerta ir kitą.
11. Įrodykite, kad dvi tiesės, lygiagrečios trečiai tiesei, yra lygiagrečios.
12. Kokia teorema vadinama turimai teoremai atvirkštine teorema? Pasakykite žinomoms teoremoms atvirkštinių teoremų pavyzdžių.
13. Įrodykite, kad dvi lygiagrečias tieses perkirtus kirstine gaunami lygūs priešiniai kampai.
14. Įrodykite, kad tiesė, statmena vienai iš dviejų lygiagrečių tiesių, statmena ir kitai.

15. Įrodykite, kad dvi lygiagrečias tieses perkirtus kirstine: a) gaunami lygūs atitinkamieji kampai; b) gaunami vienašaliai kampai, kurių suma lygi 180°.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

213. 121 paveiksle $CE=ED$, $BE=EF$ ir $KE \parallel AD$. Įrodykite, kad $KE \parallel BC$.

214. Tiesė, einanti per trikampio ABC pusiaukampinės AD vidurį ir statmena pusiaukampinei AD, kraštinę AC kerta taške M. Įrodykite, kad $MD \parallel AB$.

215. Remdamiesi 122 paveikslo duomenimis raskite kampą *1*.

216. 123 paveiksle DE — kampo ADF pusiaukampinė. Remdamiesi paveikslo duomenimis raskite trikampio ADE kampus.

217. Tiesės a ir b lygiagrečios tiesei c. Įrodykite, kad kiekviena tiesė, kertanti tiesę a, kerta ir tiesę b.

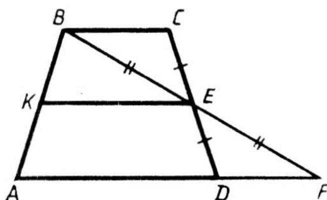
218. Tiesės a ir b susikerta. Ar galima nubrėžti tokią tiesę, kuri kirstų tiesę a ir būtų lygiagreti tiesei b? Atsakymą pagrįskite.

219*. Duotos dvi tiesės: a ir b. Jei kiekviena tiesė, kertanti tiesę a, kerta ir tiesę b, tai tiesės a ir b lygiagrečios. Įrodykite.

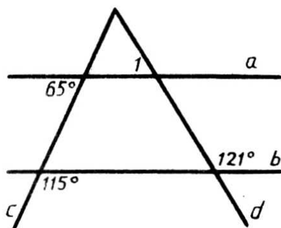
220. Jei tieses a ir b perkirtus kirstine gaunami nelygūs priešiniai kampai, tai tiesės a ir b susikerta. Įrodykite.

221. Duotas trikampis ABC bei tokie taškai M ir N, kad atkarpos BM vidurys sutampa su kraštinės AC viduriu, o atkarpos CN vidurys — su atkarpos AB viduriu. Įrodykite, kad taškai M, N ir A yra vienoje tiesėje.

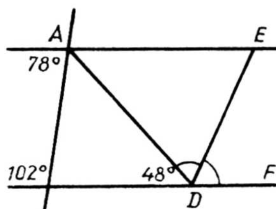
222. Duota tiesė a ir joje nesantis taškas A. Skriestuvu ir liniuote per tašką A nubrėžkite tiesę, lygiagrečią tiesei a.



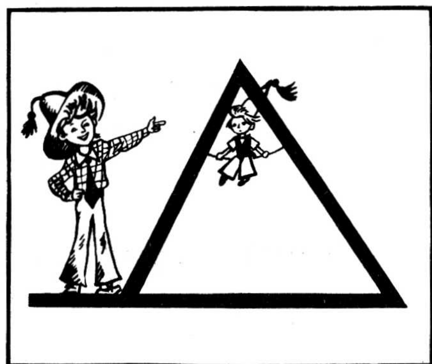
121 pav.



122 pav.



123 pav.



IV skyrius

TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ PRIEKLAUSOS

§ 1. TRIKAMPIO KAMPŲ SUMA

30. Trikampio kampų sumos teorema. Įrodysime vieną svarbiausių geometrijos teoremų — trikampio kampų sumos teoremą.

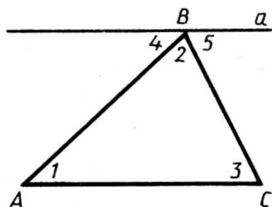
Teorema. ***Trikampio kampų suma lygi* 180°.**

Įrodymas. Išnagrinėkime bet kokį trikampį ABC. Įrodysime, kad $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

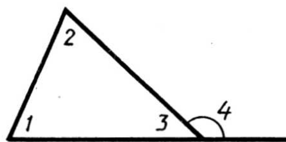
Per viršūnę B nubrėžkime tiesę a, lygiagrečią kraštinei AC (124 pav.). Kampai *1* ir *4* yra priešiniai kampai, gauti lygiagrečias tieses a ir AC perkirtus kirstine AB, o kampai *3* ir *5* — priešiniai kampai, gauti tas pačias lygiagrečias tieses perkirtus kirstine BC, todėl

$$\angle 4=\angle 1,\quad \angle 5=\angle 3. \qquad (1)$$

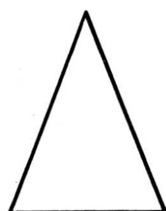
Aišku, kad kampų *4*, *2*, *5* suma lygi ištiestiniam kampui, kurio viršūnė B, t. y. $\angle 4+\angle 2+\angle 5=180°$. Iš čia, atsižvelgę į (1) lygybes, gauname: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$, arba $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. Teorema įrodyta.

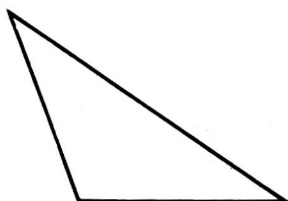


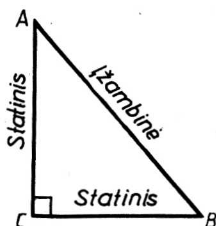
124 pav.



125 pav.







126 pav.

Trikampio kampui gretutinis kampas vadinamas trikampio *priekampiu*. Įrodysime, kad *trikampio priekampis lygus dviejų jam negretutinių trikampio kampų sumai.*

125 paveiksle kampas *4* — trikampio priekampis, gretutinis trikampio kampui *3*. Kadangi $\angle 4+\angle 3=180°$, o remiantis trikampio kampų sumos teorema $(\angle 1+\angle 2)+\angle 3=180°$, tai $\angle 4=$ $=\angle 1+\angle 2$, ką ir reikėjo įrodyti.

31. Smailusis, statusis ir bukasis trikampiai. Iš trikampio kampų sumos teoremos išplaukia, kad jei vienas trikampio kampas status arba bukas, tai kitų dviejų kampų suma ne didesnė už 90°, taigi kiekvienas tų kampų smailusis. Vadinasi, *kiekvieno trikampio arba visi trys kampai smailieji, arba du kampai smailieji, o trečias — bukasis arba statusis.*

Trikampis, kurio visi trys kampai smailieji, vadinamas *smailiúoju* (126 pav., *a*). Trikampis, kurio vienas kampas bukasis, vadinamas *bukúoju* (126 pav., *b*). Trikampis, kurio vienas kampas statusis, vadinamas *stačiúoju*. Stačiojo trikampio kraštinė, esanti prieš statųjį kampą, vadinama *įžambìnė*, o kitos dvi kraštinės — *statìniais*. 126 paveiksle, *c*, pavaizduotas statusis trikampis *ABC*, kurio kampas *C* — statusis.

Uždaviniai

223. Raskite trikampio *ABC* kampą *C*, kai: a) $\angle A=65°$, $\angle B=57°$; b) $\angle A=24°$, $\angle B=130°$; c) $\angle A=\alpha$, $\angle B=2\alpha$; d) $\angle A=60°+$ $+\alpha$, $\angle B=60°-\alpha$.

224. Raskite trikampio *ABC* kampus, kai $\angle A:\angle B:\angle C=2:3:4$.

225. Įrodykite, kad kiekvienas lygiakraščio trikampio kampas lygus 60°.

226. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo smailieji.

227. Raskite lygiašonio trikampio kampus, kai: a) kampas prie pagrindo du kartus didesnis už kampą prieš pagrindą; b) kampas prie pagrindo tris kartus mažesnis už jo priekampį.

228. Raskite lygiašonio trikampio kampus, kai vienas jo kampas lygus: a) 40°; b) 60°; c) 100°.

229. Nubrėžta lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas AC, pusiaukampinė AD. Raskite $\angle ADC$, kai $\angle C = 50°$.

230. Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės susikerta taške M. Raskite $\angle AMB$, kai $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

231. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM lygi pusei kraštinės BC. Įrodykite, kad trikampis ABC statusis.

232. Jei vienas trikampio priekampis du kartus didesnis už jam negretutinį trikampio kampą, tai trikampis lygiašonis. Įrodykite. Ar teisingas atvirkštinis teiginys?

233. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio kampo, esančio prieš pagrindą, priekampio pusiaukampinė lygiagreti pagrindui.

234. Vienas lygiašonio trikampio priekampis lygus 115°. Raskite trikampio kampus.

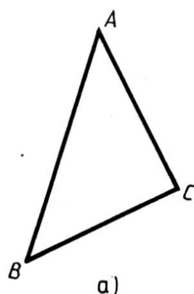
235. Nubrėžta lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas AC, pusiaukampinė AD. Raskite to trikampio kampus, kai $\angle ADB = 110°$.

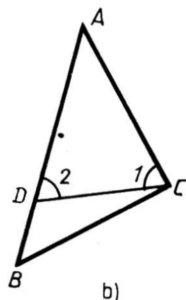
§ 2. TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ PRIEKLAUSOS

32. Trikampio kraštinių ir kampų prieklausų teorema

T e o r e m a. 1) ***Prieš didesnę trikampo kraštinę yra didesnis kampas***; 2) atvirkščiai, ***prieš didesnį trikampio kampą yra didesnė kraštinė.***

Į r o d y m a s. 1) Sakykime, trikampio ABC kraštinė AB didesnė už kraštinę AC (127 pav., *a*). Įrodysime, kad $\angle C > \angle B$. Kraštinėje AB atidėkime atkarpą AD, lygią kraštinei AC (127 pav., *b*). Ka-





127 pav.

dangi $AD<AB$, tai taškas D yra tarp taškų A ir B. Vadinasi, kampas 1 yra kampo C dalis, todėl $\angle C>\angle 1$. Kampas 2 — trikampio BDC priekampis, todėl $\angle 2>\angle B$. Kampai 1 ir 2 — lygiašonio trikampio ADC kampai prie pagrindo, todėl jie lygūs. Taigi $\angle C>\angle 1$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 2>\angle B$. Iš čia išplaukia, kad $\angle C>\angle B$.

2) Sakykime, trikampio ABC $\angle C>\angle B$. Įrodysime, kad $AB>AC$.

Tarkime, kad taip nėra. Tada arba $AB=AC$, arba $AB<AC$. Pirmuoju atveju trikampis ABC lygiašonis, todėl $\angle C=\angle B$. Antruoju atveju $\angle B>\angle C$ (prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas). Ir viena, ir kita prieštarauja sąlygai $\angle C>\angle B$, todėl prielaida neteisinga. Vadinasi, $AB>AC$. Teorema įrodyta.

1 išvada. *Stačiojo trikampio įžambinė didesnė už statinį.*

Įrodysime. Įžambinė yra prieš statųjį kampą, o statinis — prieš smailųjį. Kadangi statusis kampas didesnis už smailųjį, tai įžambinė didesnė už statinį.

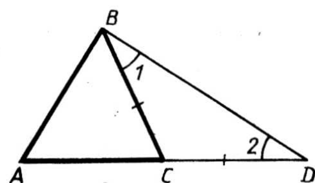
2 išvada. *Jei du trikampio kampai lygūs, tai trikampis lygiašonis* (lygiašonio trikampio požymis).

Įrodysime. Sakykime, du trikampio kampai lygūs. Tada lygios ir prieš tuos kampus esančios kraštinės. Jei tartume, kad viena tų kraštinių didesnė už kitą, tai prieš ją esantis kampas būtų didesnis už prieš kitą kraštinę esantį kampą, o tai prieštarauja sąlygai (tam, kad tie kampai lygūs). Taigi nagrinėjamo trikampio dvi kraštinės lygios, t. y. trikampis — lygiašonis.

33. Trikampio nelygybė

Teorema. ***Kiekviena trikampio kraštinė mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą.***

Įrodymas. Išnagrinėkime trikampį ABC. Įrodysime, kad $AB<AC+CB$. Kraštinės AC tęsinyje atidėkime atkarpą CD, lygią kraštinei CB (128 pav.). Lygiašonio trikampio BCD $\angle 1=\angle 2$, o trikampio ABD $\angle ABD>\angle 1$. Vadinasi, $\angle ABD>\angle 2$. Kadangi prieš didesnį trikampio kampą yra didesnė kraštinė, tai $AB<AD$. Tačiau $AD=AC+CD=AC+CB$, todėl $AB<AC+CB$. Teorema įrodyta.



128 pav.

Išvada. *Kad ir kokie būtų trys taškai A, B ir C, nesantys vienoje tiesėje, teisingos nelygybės:* $AB<AC+CB$, $AC<AB+BC$, $BC<BA+AC$. Kiekviena tų nelygybių vadinama *trikampio nelygybe.*

236. Palyginkite trikampio ABC kampus ir išaiškinkite, ar kampas A gali būti bukasis, kai: a) $AB>BC>AC$; b) $AB=AC<BC$.

237. Palyginkite trikampio ABC kraštines, kai:
a) $\angle A>\angle B>\angle C$; b) $\angle A>\angle B=\angle C$.

238. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti lygiašonio trikampio pagrindo tašką (ne viršūnę) su prieš jį esančia viršūne, mažesnė už šoninę kraštinę.

239. Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinė ne mažesnė už iš tos pačios viršūnės nubrėžtą aukštinę.

240. Lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas AC, kampų A ir C pusiaukampinės susikerta taške O. Įrodykite, kad trikampis AOC lygiašonis.

241. Tiesė, lygiagreti lygiašonio trikampio ABC pagrindui, šonines kraštines AB ir AC kerta taškuose M ir N. Įrodykite, kad trikampis AMN lygiašonis.

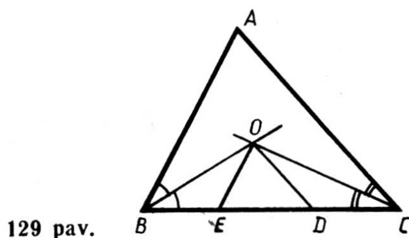
242. Jei trikampio priekampio pusiaukampinė lygiagreti trikampio kraštinei, tai trikampis lygiašonis. Įrodykite.

243. Per trikampio ABC viršūnę C nubrėžta tiesė, lygiagreti jo pusiaukampinei AA_1. Ji tiesę AB kerta taške D. Įrodykite, kad $AC=AD$.

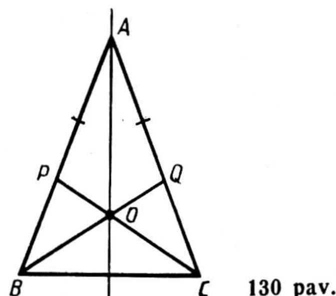
244. Atkarpa AD — trikampio ABC pusiaukampinė. Per tašką D nubrėžta tiesė, lygiagreti AC. Ji kraštinę AB kerta taške E. Įrodykite, kad trikampis ADE lygiašonis.

245. Per trikampio ABC pusiaukampinių BB_1 ir CC_1 susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti tiesei BC. Ji kraštines AB ir AC kerta taškuose M ir N. Įrodykite, kad $MN=BM+CN$.

246. 129 paveiksle spinduliai BO ir CO — trikampio ABC kampų



129 pav.



130 pav.

B ir C pusiaukampinės, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Įrodykite, kad trikampio EDO perimetras lygus atkarpos BC ilgiui.

247. 130 paveiksle $AB=AC$, $AP=AQ$. Įrodykite, kad: a) trikampis BOC lygiašonis; b) tiesė OA eina per pagrindo BC vidurį ir jam statmena.

248. Ar yra trikampis, kurio kraštinės: a) 1 m, 2 m ir 3 m; b) 1,2 dm, 1 dm ir 2,4 dm?

249. Lygiašonio trikampio viena kraštinė lygi 25 cm, kita — 10 cm. Katra jų yra pagrindas?

250. Raskite lygiašonio trikampio kraštinę, kai kitos dvi jo kraštinės lygios: a) 5 cm ir 3 cm; b) 8 cm ir 2 cm; c) 10 cm ir 5 cm.

251. Įrodykite, kad kiekviena trikampio kraštinė didesnė už kitų dviejų kraštinių skirtumą.

S p r e n d i m a s. Įrodysime, pavyzdžiui, kad trikampio ABC $AB>AC-BC$. Kadangi $AB+BC>AC$, tai $AB>AC-BC$.

252. Du trikampio priekampiai, kurių viršūnės skirtingos, lygūs. Trikampio perimetras lygus 74 cm, o viena kraštinė — 16 cm. Raskite kitas dvi trikampio kraštines.

253. Lygiašonio trikampio perimetras lygus 25 cm, dviejų kraštinių skirtumas lygus 4 cm, o vienas priekampių — smailusis kampas. Raskite trikampio kraštines.

§ 3. STATIEJI TRIKAMPIAI

34. Keletas stačiųjų trikampių savybių. Išnagrinėsime stačiųjų trikampių savybes, kurios atskleidžiamos remiantis trikampio kampų sumos teorema.

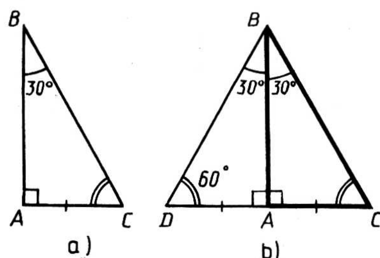
1°. *Stačiojo trikampio dviejų smailiųjų kampų suma lygi* 90°.

Įrodysime. Trikampio kampų suma lygi 180°, o statusis kampas lygus 90°, todėl stačiojo trikampio dviejų smailiųjų kampų suma lygi 90°.

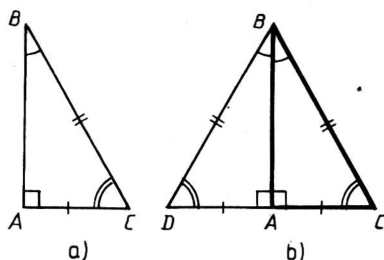
2°. *Stačiojo trikampio statinis, esantis prieš* 30° *kampą, lygus pusei įžambinės.*

Išnagrinėkime statųjį trikampį ABC, kurio $\angle A$ — statusis, $\angle B=30°$, taigi $\angle C=60°$ (131 pav., *a*). Įrodysime, kad $AC=$ $=\frac{1}{2}BC$.

Prie trikampio ABC pridėkime jam lygų trikampį ABD taip, kaip parodyta 131 paveiksle, *b*. Gausime trikampį BCD, kurio



131 pav.



132 pav.

$\angle B = \angle D = 60°$, todėl $DC = BC$. Tačiau $AC = \frac{1}{2}DC$. Vadinasi, $AC = \frac{1}{2}BC$, ką ir reikėjo įrodyti.

3⁰. *Jei stačiojo trikampio statinis lygus pusei įžambinės, tai prieš tą statinį esantis kampas lygus* 30°.

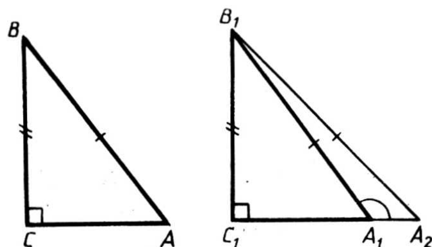
Išnagrinėkime statųjį trikampį ABC, kurio statinis AC lygus pusei įžambinės BC (132 pav., *a*). Įrodysime, kad $\angle ABC = 30°$. Prie trikampio ABC pridėkime jam lygų trikampį ABD taip, kaip parodyta 132 paveiksle, *b*. Gausime lygiakraštį trikampį BCD. Lygiakraščio trikampio visi kampai lygūs (paaiškinkite, kodėl), todėl kiekvienas jų lygus 60°. Skyrium imant, $\angle DBC = 60°$. Tačiau $\angle DBC = 2\angle ABC$. Vadinasi, $\angle ABC = 30°$, ką ir reikėjo įrodyti.

35. Stačiųjų trikampių lygumo požymiai. Kadangi kampas tarp stačiojo trikampio statinių status, o bet kurie du statieji kampai lygūs, tai iš pirmojo trikampių lygumo požymio išplaukia: *jei vieno stačiojo trikampio statiniai atitinkamai lygūs kito stačiojo trikampio statiniams, tai tie statieji trikampiai lygūs.* Iš antrojo trikampių lygumo požymio išplaukia: *jei vieno stačiojo trikampio statinis ir prie jo esantis smailusis kampas atitinkamai lygūs kito stačiojo trikampio statiniui ir prie jo esančiam smailiajam kampui, tai tie statieji trikampiai lygūs.*

Išnagrinėsime dar du stačiųjų trikampių lygumo požymius.

Teorema. ***Jei vieno stačiojo trikampio įžambinė ir smailusis kampas atitinkamai lygūs kito stačiojo trikampio įžambinei ir smailiajam kampui, tai tie statieji trikampiai lygūs.***

Įrodymas. Iš 34 skyrelio 1⁰ savybės išplaukia, kad tokių trikampių kiti du smailieji kampai irgi lygūs, todėl, remiantis



133 pav.

antruoju trikampių lygumo požymiu, t. y. pagal kraštinę (įžambinę) ir du prie jos esančius kampus, trikampiai lygūs. Teorema įrodyta.

T e o r e m a. ***Jei vieno stačiojo trikampio įžambinė ir statinis atitinkamai lygūs kito stačiojo trikampio įžambinei ir statiniui, tai tie statieji trikampiai lygūs.***

Į r o d y m a s. Išnagrinėkime trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių kampai C ir C_1 — statieji, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ (133 pav.). Įrodysime, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

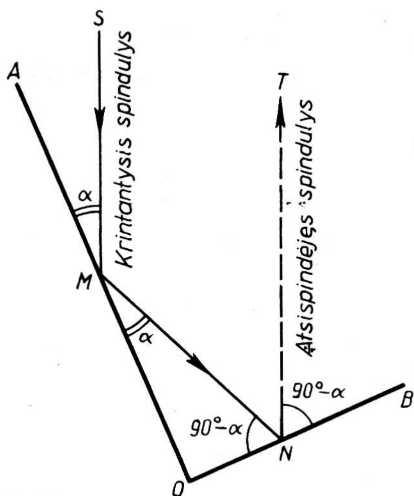
Kadangi $\angle C=\angle C_1$, tai trikampį ABC galima uždėti ant trikampio $A_1B_1C_1$ taip, kad viršūnė C sutaptų su viršūne C_1, o kraštinės CA ir CB atsidurtų spinduliuose C_1A_1 ir C_1B_1. Kadangi $CB=$ $=C_1B_1$, tai viršūnė B sutaps su viršūne B_1. Tačiau tada viršūnės A ir A_1 irgi sutaps. Įrodysime. Jei tartume, kad taškas A sutaps su tam tikru kitu spindulio C_1A_1 tašku A_2, tai gautume lygiašonį trikampį $A_1B_1A_2$, kurio kampai prie pagrindo A_1A_2 nelygūs (133 paveiksle $\angle A_2$ — smailusis, o $\angle A_1$ — bukasis, nes gretutinis smailiajam kampui $B_1A_1C_1$). Tačiau taip negali būti, todėl viršūnės A ir A_1 sutaps. Vadinasi, trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ sutaps, todėl jie lygūs. Teorema įrodyta.

36[1]. Kampinis atšvaitas. Žinome, kad stačiojo trikampio dviejų smailiųjų kampų suma lygi 90°. Ta savybe pagrįsta paprasčiausio *kampinio atšvaito* konstrukcija. Pirmiausia išnagrinėkime šitokį uždavinį.

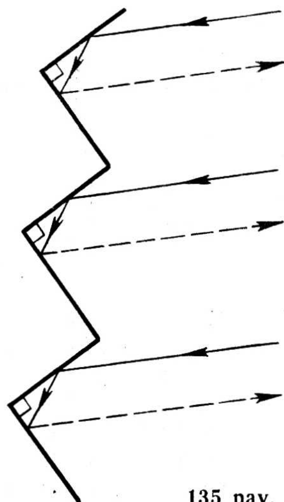
U ž d a v i n y s. *Kampas tarp veidrodžių OA ir OB lygus* 90°. *Šviesos spindulys, krintantis į veidrodį OA kampu* α, *nuo jo atsispindi, po to atsispindi nuo veidrodžio OB* (134 pav.). *Reikia įrodyti, kad krintantysis ir atsispindėjęs spinduliai lygiagretūs.*

S p r e n d i m a s. Remiantis šviesos atspindžio dėsniu, krintantysis spindulys SM ir spindulys MN su tiese OA sudaro lygius kampus α. Kadangi trikampis MON statusis, tai kampas MNO lygus $90°-\alpha$. Dar kartą pritaikę šviesos atspindžio dėsnį gau-

[1] Šio skyrelio galima nenagrinėti.



134 pav.


135 pav.

name, kad spindulys MN ir atsispindėjęs spindulys NT su tiese OB sudaro lygius kampus. 134 paveiksle $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$, todėl $\angle SMN + \angle MNT = 180°$. Vadinasi, krintantysis spindulys SM ir atsispindėjęs spindulys NT lygiagretūs, ką ir reikėjo įrodyti.

Paprasčiausias kampinis atšvaitas — tai keli veidrodžiai, išdėstyti taip, kad gretimi veidrodžiai sudaro 90° kampą. 135 paveiksle tokį atšvaitą schemiškai vaizduoja laužtė. Įsivaizduokime, kad į tokį atšvaitą krinta lygiagrečių spindulių pluoštas (paveiksle tie spinduliai pavaizduoti ištisinėmis linijomis su rodyklėmis). Tada atsispindėję spinduliai (jie pavaizduoti brūkšninėmis linijomis su rodyklėmis) bus lygiagretūs krintantiesiems spinduliams. Taigi kampinis atšvaitas į jį krintantį lygiagrečių spindulių pluoštą visada „grąžina atgal".

Ši kampinio atšvaito savybė pritaikoma technikoje. Pavyzdžiui, kampinis atšvaitas tvirtinamas prie dviračio užpakalinio sparno. Jis „grąžina atgal" automobilio žibintų šviesą ir vairuotojas naktį gali matyti priekyje važiuojantį dviratininką. Pabrėšime, kad praktikoje naudojamas kampinis atšvaitas sudėtingesnis už čia aprašytą paprasčiausią atšvaitą, tačiau jų veikimo principas tas pats.

Kampinis atšvaitas buvo įrengtas vienoje į Mėnulį paleistoje automatinėje stotyje. Mėnulio vieta, kurioje buvo automatinė stotis su kampiniu atšvaitu, iš Žemės buvo apšviesta la-

zerio spinduliais. Spinduliai „grįžo“ į tą vietą, kurioje buvo lazeris. Tiksliai išmatavus laiką nuo lazerio įjungimo momento iki signalo grįžimo momento, pavyko labai tiksliai (iki 1 cm) rasti atstumą nuo Žemės paviršiaus iki Mėnulio paviršiaus.

Uždaviniai

254. Raskite lygiašonio stačiojo trikampio kampus.

255. Nubrėžta lygiašonio trikampio CDE, kurio pagrindas CE, aukštinė CF. Raskite $\angle ECF$, kai $\angle D=54°$.

256. Vienas stačiojo trikampio kampas lygus 60°, o įžambinės ir mažesniojo statinio suma lygi 26,4 cm. Raskite trikampio įžambinę.

257. Stačiojo trikampio ABC kampas C statusis; priekampis, kurio viršūnė A, lygus 120°; $AC+AB=18$ cm. Raskite AC ir AB.

258. Iš lygiakraščio trikampio ABC kraštinės BC vidurio D nuleistas statmuo DM į tiesę AC. Raskite AM, kai $AB=12$ cm.

259. Kampas, esantis prieš lygiašonio trikampio pagrindą, lygus 120°. Trikampio aukštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę, lygi 9 cm. Raskite trikampio pagrindą.

260. Aukštinė, nubrėžta į lygiašonio trikampio pagrindą, lygi 7,6 cm, o trikampio šoninė kraštinė lygi 15,2 cm. Raskite to trikampio kampus.

261. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio aukštinės, nubrėžtos iš pagrindo viršūnių, lygios.

262. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ kampai A ir A_1 — statieji, BD ir B_1D_1 — pusiaukampinės, $\angle B=\angle B_1$, $BD=B_1D_1$. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

263. Aukštinės, nubrėžtos į smailiojo lygiašonio trikampio ABC šonines kraštines AB ir AC, susikerta taške M; $\angle BMC=140°$. Raskite trikampio kampus.

264. Trikampio ABC aukštinės AA_1 ir BB_1 susikerta taške M, $\angle A=55°$, $\angle B=67°$. Raskite $\angle AMB$.

265. Nubrėžtos lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas AC, pusiaukampinė AF ir aukštinė AH; $\angle B=112°$. Raskite trikampio AHF kampus.

266. Kampo O kraštinėse pažymėti taškai A ir B; be to, $OA=OB$. Per tuos taškus nubrėžtos tiesės, statmenos kampo kraštinėms. Jos susikerta taške C. Įrodykite, kad spindulys OC — kampo O pusiaukampinė.

267. Vieno smailiojo trikampio kraštinė ir iš jos galų nubrėžtos aukštinės atitinkamai lygios kito smailiojo trikampio kraštinei ir iš jos galų nubrėžtoms aukštinėms. Įrodykite, kad tie trikampiai lygūs.

268. Suformuluokite ir įrodykite stačiųjų trikampių lygumo pagal statinį ir prieš jį esantį kampą požymį.

269. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BH=B_1H_1$; čia BH ir B_1H_1 — trikampių aukštinės. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

270. Kampo viduje pažymėtas taškas A. Per tašką A nubrėžkite tiesę, kuri kampo kraštinėse atkirstų lygias atkarpas.

§ 4. TRIKAMPIO BRAIŽYMAS, KAI DUOTI TRYS ELEMENTAI

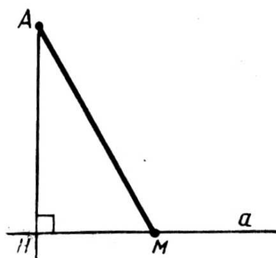
37. Atstumas nuo taško iki tiesės. Atstumas tarp lygiagrečiųjų tiesių. Atstumu tarp dviejų taškų pavadinome tuos taškus jungiančios atkarpos ilgį. Dabar apibrėšime atstumą nuo taško iki tiesės ir atstumą tarp lygiagrečiųjų tiesių.

Sakykime, atkarpa AH — statmuo, nuleistas iš taško A į tiesę a, M — bet kuris tiesės a taškas, nesutampantis su H (136 pav.). Atkarpa AM vadinama *pasvirąja, nubrėžta iš taško A į tiesę a.* Stačiojo trikampio AHM statinis AH mažesnis už įžambinę AM. Vadinasi, *statmuo, nubrėžtas iš taško į tiesę, mažesnis už kiekvieną pasvirąją, nubrėžtą iš to taško į tą tiesę.*

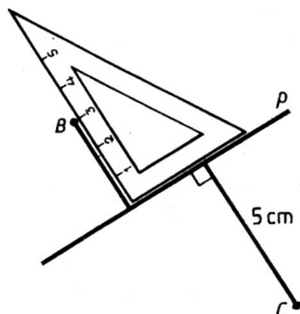
Statmens, nubrėžto iš taško į tiesę, ilgis vadinamas atstumu nuo to taško iki tiesės.

Pabrėžiame, kad atstumas nuo taško iki tiesės lygus mažiausiam iš atstumų nuo to taško iki tiesės taškų.

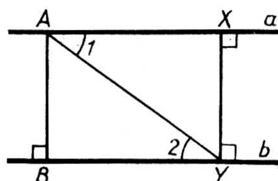
137 paveiksle atstumas nuo taško B iki tiesės p lygus 3 cm, o atstumas nuo taško C iki tos tiesės lygus 5 cm.



136 pav.



137 pav.



138 pav.

Prieš apibrėždami atstumą tarp lygiagrečiųjų tiesių, išnagrinėsime vieną svarbiausių lygiagrečių tiesių savybių.

T e o r e m a. ***Visi kiekvienos iš dviejų lygiagrečiųjų tiesių taškai vienodai nutolę nuo kitos tiesės.***

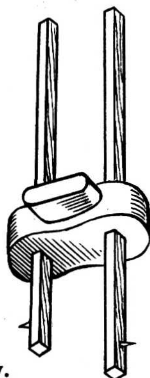
Į r o d y m a s. Išnagrinėkime lygiagrečiąsias tieses a ir b. Pažymėkime tiesės a tašką A ir iš to taško nuleiskime statmenį AB į tiesę b (138 pav.). Įrodysime, kad atstumas nuo tiesės a bet kurio taško X iki tiesės b lygus AB.

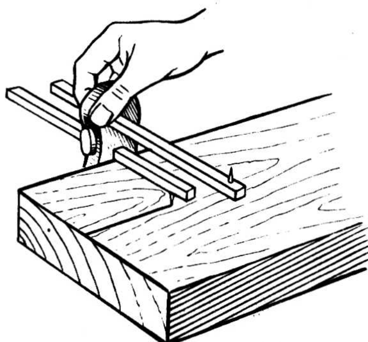
Iš taško X nuleiskime statmenį XY į tiesę b. Kadangi $XY \perp b$, tai $XY \perp a$. Statieji trikampiai ABY ir YXA lygūs pagal įžambinę ir smailųjį kampą (AY — bendra įžambinė, $\angle 1 = \angle 2$ kaip priešiniai kampai, gauti perkirtus lygiagrečias tieses a ir b kirstine AY). Vadinasi, $XY = AB$. Taigi kiekvienas tiesės a taškas X nuo tiesės b nutolęs atstumu AB. Aišku, kad visi tiesės b taškai tokiu pačiu atstumu nutolę nuo tiesės a. Teorema įrodyta.

Iš įrodytosios teoremos išplaukia, kad taškas, judantis viena lygiagrečių tiesių, visą laiką vienodai nutolęs nuo kitos tiesės. *Atstumas nuo vienos lygiagrečių tiesių bet kurio taško iki kitos tiesės vadinamas atstumu tarp tų lygiagrečiųjų tiesių.*

Pabrėžiame, kad atstumas tarp dviejų lygiagrečiųjų tiesių lygus mažiausiam iš atstumų nuo vienos tiesės taškų iki kitos tiesės taškų.

P a s t a b a. Įrodytai teoremai atvirkštinis teiginys teisingas: visi plokštumos taškai, esantys vienoje tiesės pusėje ir vienodai





139 pav.

nutolę nuo jos, yra tai tiesei lygiagrečioje tiesėje (įrodykite savarankiškai). Šia savybe pagrįsta įrankio, vadinamo *brėžtuvù* (139 pav., *a*), konstrukcija. Brėžtuvą naudoja staliai medinio tašelio paviršiuje ženklindami tašelio kraštui lygiagrečią tiesę. Brėžtuvą traukiant išilgai tašelio krašto, metalinė adata įrėžia tašelio kraštui lygiagrečią tiesės atkarpą (139 pav., *b*).

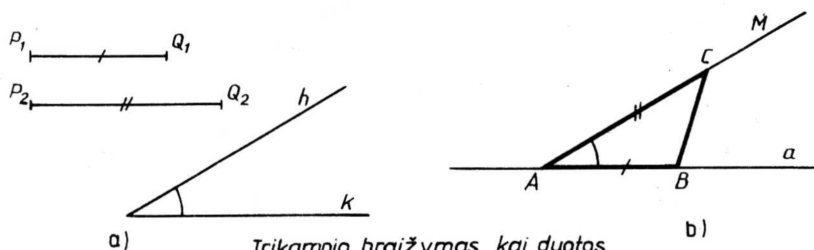
38. Trikampio braižymas, kai duoti trys elementai

1 uždavinys. *Reikia nubraižyti trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir kampas tarp jų.*

Sprendimas. Pirmiausia paaiškinsime, kaip reikia suprasti šį uždavinį, t. y. kas čia duota ir ką reikia nubraižyti. Duotos atkarpos P_1Q_1, P_2Q_2 ir kampas hk (140 pav., *a*). Skriestuvu ir liniuote (be padalų) reikia nubraižyti tokį trikampį ABC, kurio dvi kraštinės, pavyzdžiui, AB ir AC, būtų lygios duotosioms atkarpoms P_1Q_1 ir P_2Q_2, o kampas A tarp tų kraštinių būtų lygus duotajam kampui hk.

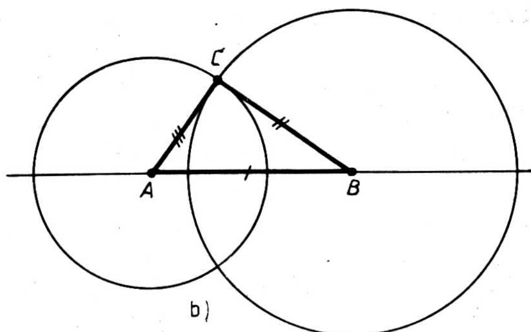
Nubrėžkime tiesę a ir joje skriestuvu atidėkime atkarpą AB, lygią atkarpai P_1Q_1 (140 pav., *b*). Po to nubraižykime kampą BAM, lygų duotajam kampui hk (jau žinome, kaip tai daroma). Spindulyje AM atidedame atkarpą AC, lygią atkarpai P_2Q_2, ir nubrėžiame atkarpą BC. Trikampis ABC — ieškomasis, nes taip braižėme: $AB=P_1Q_1$, $AC=P_2Q_2$, $\angle A=\angle hk$.

Iš brėžimo išplaukia, kad su bet kuriomis duotomis atkarpomis P_1Q_1, P_2Q_2 ir neištiestiniu kampu hk norimą trikampį galima nubraižyti. Kadangi tiesę a ir jos tašką A galima pasirinkti laisvai, tai yra be galo daug trikampių, tenkinančių uždavinio sąlygas. Visi tie trikampiai lygūs vienas kitam (remiantis pirmuoju trikampių lygumo požymiu), todėl sakoma, kad toks *uždavinys turi vienintelį sprendinį.*



Trikampio braižymas, kai duotos dvi kraštinės ir kampas tarp jų

140 pav.



Trikampio braižymas, kai duotos trys kraštinės

141 pav.

2 u ž d a v i n y s. *Reikia nubraižyti trikampį, kai duota kraštinė ir du prie jos esantys kampai.*

Šį uždavinį išspręskite savarankiškai.

3 u ž d a v i n y s. *Reikia nubraižyti trikampį, kai duotos trys kraštinės.*

S p r e n d i m a s. Sakykime, duotos atkarpos P_1Q_1, P_2Q_2 ir P_3Q_3 (141 pav., *a*). Reikia nubraižyti trikampį ABC, kurio $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$.

Nubrėžkime tiesę ir joje skriestuvu atidėkime atkarpą AB, lygią atkarpai P_1Q_1 (141 pav., *b*). Po to nubrėžkime du apskritimus: vieną, kurio centras A ir spindulys P_3Q_3; kitą, kurio centras B ir spindulys P_2Q_2. Sakykime, C — vienas tų apskritimų susikirtimo taškų. Nubrėžę atkarpas AC ir BC, gauname ieškomąjį trikampį ABC. Tai išplaukia iš brėžimo: $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$, t. y. trikampio ABC kraštinės lygios duotosioms atkarpoms.

3-ias uždavinys ne visada turi sprendinį. Įrodysime. Kiekvieno trikampio bet kurių dviejų kraštinių suma didesnė už trečią kraštinę. Jei kuri nors iš duotų atkarpų didesnė už kitų dviejų atkarpų sumą arba jai lygi, tai negalima nubraižyti trikampio, kurio kraštinės būtų lygios duotoms atkarpoms.

Klausimai ir uždaviniai

271. Iš taško į tiesę nubrėžti statmuo ir pasviroji, kurių ilgių suma lygi 17 cm, o skirtumas 1 cm. Raskite atstumą nuo taško iki tiesės.

272. Nubrėžta lygiakraščio trikampio ABC pusiaukampinė AD. Atstumas nuo taško D iki tiesės AC lygus 6 cm. Raskite atstumą nuo viršūnės A iki tiesės BC.

273. Stačiojo trikampio CDE įžambinės CE ir statinio CD suma lygi 31 cm, o jų skirtumas lygus 3 cm. Raskite atstumą nuo viršūnės C iki tiesės DE.

274. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio pagrindo vidurys vienodai nutolęs nuo šoninių kraštinių.

275. Lygiašonio trikampio ABC pagrinde AB pažymėtas taškas M, vienodai nutolęs nuo šoninių kraštinių. Įrodykite, kad CM — trikampio ABC aukštinė.

276. Per atkarpos vidurį nubrėžta tiesė. Įrodykite, kad atkarpos galai vienodai nutolę nuo tos tiesės.

277. Atstumas tarp lygiagrečių tiesių a ir b lygus 3 cm, o atstumas tarp lygiagrečių tiesių a ir c lygus 5 cm. Raskite atstumą tarp tiesių b ir c.

278. Tiesė AB lygiagreti tiesei CD, $\angle ADC=30°$, $AD=6$ cm. Raskite atstumą tarp tiesių AB ir CD.

279*. Įrodykite, kad visi plokštumos taškai, esantys vienoje tiesės pusėje ir vienodai nutolę nuo jos, yra tai tiesei lygiagrečioje tiesėje.

280. Duotas neištiestinis kampas ABC ir atkarpa PQ. Kas yra aibė visų taškų, kurie yra duotojo kampo viduje ir nuo tiesės BC nutolę atstumu PQ?

281. Kas yra aibė visų plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų lygiagrečių tiesių?

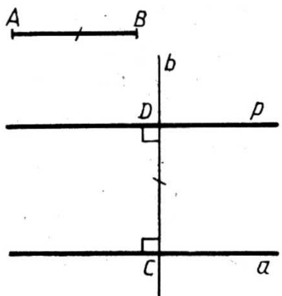
282. Tiesės a ir b lygiagrečios; $X \in a$, $Y \in b$. Įrodykite, kad visų atkarpų XY vidurio taškai yra tiesėje, lygiagrečioje tiesėms a ir b ir vienodai nutolusioje nuo jų.

283. Kas yra aibė visų plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo duotosios tiesės?

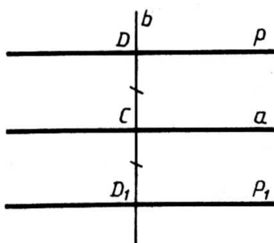
Brėžimo uždaviniai

284. Duota tiesė a ir atkarpa AB. Nubrėžkite tiesę p, lygiagrečią tiesei a, kad atstumas tarp tiesių a ir p būtų lygus AB.

S p r e n d i m a s. Tiesėje a pažymėkime kurį nors tašką C. Per tašką C nubrėžkime tiesę b, statmeną tiesei a (142 pav.).



142 pav.



143 pav.

Po to viename iš tiesės *b* spindulių, išeinančių iš taško *C*, atidėkime atkarpą *CD*, lygią atkarpai *AB*. Per tašką *D* nubrėžkime tiesę *p*, statmeną tiesei *b*. Tiesė *p* — ieškomoji (paaiškinkite, kodėl).

Iš brėžimo aišku, kad su kiekviena tiese *a* ir kiekviena atkarpa *AB* norimą tiesę galima nubrėžti. Be to, uždavinys turi du sprendinius (143 paveikslo tiesės *p* ir p_1).

285. Duotos susikertančios tiesės *a* ir *b* bei atkarpa *PQ*. Tiesėje *a* nubrėžkite tašką, nuo tiesės *b* nutolusį atstumu *PQ*.

286. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė, prie jos esantis kampas ir iš to kampo viršūnės nubrėžta pusiaukampinė.

287. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė, į vieną iš kitų dviejų kraštinių nubrėžta pusiaukraštinė ir kampas tarp duotosios kraštinės ir duotosios pusiaukraštinės.

288. Duota atkarpa *PQ* ir kampas *hk*. Nubraižykite tokį trikampį *ABC*, kurio: a) $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle hk$; b) $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{4}\angle hk$.

289. Duoti du kampai *hk* ir h_1k_1 bei atkarpa *PQ*. Nubraižykite tokį trikampį *ABC*, kurio $AB=PQ$, $\angle A=\angle hk$, $\angle B=$ $=\frac{1}{2}\angle h_1k_1$.

290. Nubraižykite statųjį trikampį, kai duoti: a) du statiniai; b) statinis ir prie jo esantis smailusis kampas.

291. Nubraižykite lygiašonį trikampį, kai duota: a) šoninė kraštinė ir prieš pagrindą esantis kampas; b) pagrindas ir kampas prie pagrindo; c) šoninė kraštinė ir kampas prie pagrindo; d) pagrindas ir šoninė kraštinė; e) pagrindas ir į pagrindą nubrėžta pusiaukraštinė.

292. Duotos atkarpos P_1Q_1, P_2Q_2 ir P_3Q_3. Nubraižykite tokį trikampį ABC, kurio: a) $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = 2P_3Q_3$; b) $AB = 2P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = \frac{3}{2} P_3Q_3$. Ar visada uždavinys turi sprendinį?

293. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė, prie jos esantis kampas ir į tą kraštinę nubrėžta aukštinė.

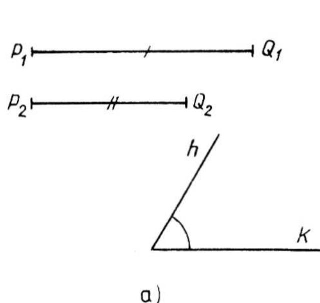
Sprendimas. Duotos atkarpos P_1Q_1 ir P_2Q_2 bei kampas hk (144 pav., *a*). Reikia nubraižyti trikampį ABC, kurio viena kraštinė, pavyzdžiui, AB, lygi duotajai atkarpai P_1Q_1, vienas prie jos esantis kampas, pavyzdžiui, kampas A, lygus duotajam kampui hk, o aukštinė CH, nubrėžta į kraštinę AB, lygi duotajai atkarpai P_2Q_2.

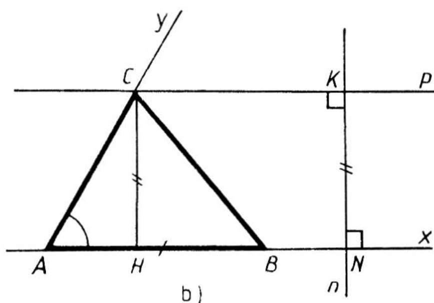
Nubraižykime kampą XAY, lygų duotajam kampui hk, ir spindulyje AX atidėkime atkarpą AB, lygią duotai atkarpai P_1Q_1 (144 pav., *b*). Atstumas nuo ieškomo trikampio viršūnės C iki tiesės AB turi būti lygus P_2Q_2. Vadinasi, taškas C turi būti tiesėje p, lygiagrečioje tiesei AB, o atstumas tarp tiesių p ir AB turi būti lygus P_2Q_2. Taigi ieškomasis taškas C yra tiesės p ir spindulio AY susikirtimo taškas. Kaip nubrėžti tiesę p, aprašyta 284 uždavinio sprendime.

Aišku, kad trikampis ABC tenkina visas uždavinio sąlygas: $AB = P_1Q_1$, $CH = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

294. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir aukštinė, nubrėžta į vieną iš tų kraštinių.

295. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir pusiaukraštinė, nubrėžta į vieną iš tų kraštinių.





144 pav.

IV SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Suformuluokite ir įrodykite trikampio kampų sumos teoremą.
2. Koks kampas vadinamas trikampio priekampiu? Įrodykite, kad trikampio priekampis lygus dviejų jam negretutinių trikampio kampų sumai.
3. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio arba visi trys kampai smailieji, arba du kampai smailieji, o trečias — bukasis arba statusis.
4. Koks trikampis vadinamas smailiuoju? Koks trikampis vadinamas bukuoju?
5. Koks trikampis vadinamas stačiuoju? Kaip vadinamos stačiojo trikampio kraštinės?
6. Įrodykite, kad: 1) prieš didesnę trikampio kraštinę yra didesnis kampas; 2) atvirkščiai, prieš didesnį trikampio kampą yra didesnė kraštinė.
7. Įrodykite, kad stačiojo trikampio įžambinė didesnė už statinį.
8. Įrodykite, kad trikampis, kurio du kampai lygūs, lygiašonis.
9. Įrodykite, kad kiekviena trikampio kraštinė mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą. Kas yra trikampio nelygybė?
10. Įrodykite, kad stačiojo trikampio dviejų smailiųjų kampų suma lygi 90°.
11. Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės. Suformuluokite atvirkštinį teiginį ir jį įrodykite.
12. Suformuluokite stačiųjų trikampių lygumo pagal įžambinę ir smailųjį kampą požymį, jį įrodykite.
13. Suformuluokite stačiųjų trikampių lygumo pagal įžambinę ir statinį požymį, jį įrodykite.
14. Paaiškinkite, kokia atkarpa vadinama pasvirąja, nubrėžta iš taško į tiesę.
15. Įrodykite, kad statmuo, nubrėžtas iš taško į tiesę, mažesnis už kiekvieną pasvirąją, nubrėžtą iš to taško į tą tiesę.
16. Ką vadiname atstumu nuo taško iki tiesės?
17. Įrodykite, kad visi kiekvienos iš dviejų lygiagrečiųjų tiesių taškai vienodai nutolę nuo kitos tiesės.
18. Ką vadiname atstumu tarp dviejų lygiagrečiųjų tiesių?

19. Paaiškinkite, kaip braižomas trikampis, kai duota: a) dvi kraštinės ir kampas tarp jų; b) kraštinė ir du prie jos esantys kampai.

20. Paaiškinkite, kaip braižomas trikampis, kai duotos trys kraštinės. Ar visada šis uždavinys turi sprendinį?

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

296. Lygiašonio trikampio ABC lygių kampų B ir C pusiaukampinės susikerta taške O. Įrodykite, kad kampas BOC lygus trikampio priekampiui, kurio viršūnė B.

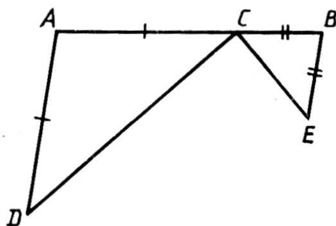
297. Trikampio ADC kraštinėje AD pažymėtas taškas B; be to, $BC=BD$. Įrodykite, kad tiesė DC lygiagreti kampo ABC pusiaukampinei.

298. 145 paveiksle $AD \parallel BE$, $AC=AD$ ir $BC=BE$. Įrodykite, kad kampas DCE — statusis.

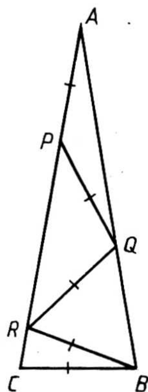
299. 146 paveiksle $AB=AC$, $AP=PQ=QR=RB=BC$. Raskite kampą A.

300. Įrodykite, kad bukojo trikampio aukštinės, nubrėžtos iš bukojo kampo viršūnės, pagrindas yra trikampio kraštinėje, o aukštinių, nubrėžtų iš smailiųjų kampų viršūnių, pagrindai yra kraštinių tęsiniuose.

301. Iš taško A nubrėžtas statmuo AH ir pasvirosios AM_1 bei AM_2 į tiesę a. Įrodykite: a) jei $HM_1=HM_2$, tai $AM_1=AM_2$; b) jei $HM_1<HM_2$, tai $AM_1<AM_2$.



145 pav.



146 pav.

302. Iš taško A nubrėžtas statmuo AH ir pasvirosios AM_1 bei AM_2 į tiesę a. Įrodykite: a) jei $AM_1=AM_2$, tai $HM_1=HM_2$; b) jei $AM_1<AM_2$, tai $HM_1<HM_2$.

303*. Gyvenvietės A ir B yra vienoje tiesaus kelio pusėje. Kur prie kelio reikia įrengti autobusų stotelę C, kad atstumų AC ir CB suma būtų mažiausia?

304*. Jei taškas M yra trikampio ABC viduje, tai $MB+MC<$ $<AB+AC$. Įrodykite.

305. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio taško, esančio trikampio viduje, iki trikampio viršūnių suma mažesnė už trikampio perimetrą.

306. Jei $AB=AC+CB$, tai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje. Įrodykite.

307. Iš stačiojo trikampio stačiojo kampo viršūnės nubrėžta aukštinė. Įrodykite, kad nagrinėjamo trikampio ir gautų trikampių kampai atitinkamai lygūs.

308. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas AC lygus 37 cm, o priekampis, kurio viršūnė B, lygus 60°. Raskite atstumą nuo viršūnės C iki tiesės AB.

309. Trikampio kraštinės AB ir AC nelygios, AH — aukštinė, AD — pusiaukampinė. Įrodykite, kad kampas HAD lygus pusei kampų B ir C skirtumo.

310. Įrodykite, kad lygių trikampių aukštinės, nubrėžtos į lygias kraštines, lygios.

311. Kas yra aibė visų plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų susikertančiųjų tiesių?

312. Atkarpa trikampio viršūnę jungia su prieš ją esančios kraštinės tašku. Įrodykite, kad atkarpa mažesnė už didesniąją iš kitų dviejų trikampio kraštinių.

313*. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir pusiaukraštinė, nubrėžta į trečią kraštinę.

314. Nubraižykite statųjį trikampį, kai duota: a) įžambinė ir smailusis kampas; b) statinis ir prieš jį esantis kampas; c) įžambinė ir statinis.

315. Skriestuvu ir liniuote nubraižykite kampą, lygų: a) 30°; b) 60°; c) 15°; d) 120°; e) 150°; f) 135°; g) 165°; h) 75°; i) 105°.

316*. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė, į ją nubrėžta aukštinė ir į vieną iš kitų dviejų kraštinių nubrėžta pusiaukraštinė.

317. Duotas trikampis ABC. Nubrėžkite atkarpą DE, lygiagrečią tiesei AC, kad taškai D ir E būtų kraštinėse AB ir BC, o $DE = AD + CE$.

318. Duotas lygiakraštis trikampis ABC ir jo kraštinės AC taškas B_1. Kraštinėse BC ir AB nubrėžkite tokius taškus A_1 ir C_1, kad trikampis $A_1B_1C_1$ būtų lygiakraštis.

319*. Nubraižykite trikampį, kai duotas kampas ir iš jo viršūnės nubrėžtos aukštinė bei pusiaukampinė.

320*. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė ir į ją nubrėžtos aukštinė bei pusiaukraštinė.

321*. Duotas trikampis ABC, kurio kampas A — statusis. Kraštinėje AB nubrėžkite tašką M, nuo tiesės BC nutolusį atstumu AM.

SUNKESNI UŽDAVINIAI

I skyriaus uždaviniai

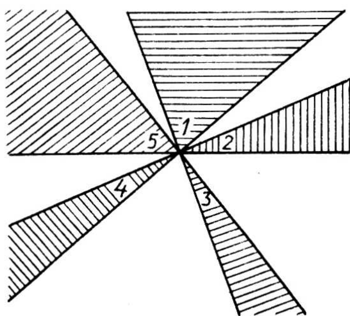
322. Sakykime, a — skaičius, išreiškiantis atkarpos AB ilgį matavimo vienetu CD, o b — skaičius, išreiškiantis atkarpos CD ilgį matavimo vienetu AB. Kaip susiję skaičiai a ir b?

323. Skaičius, išreiškiantis atkarpos AB ilgį matavimo vienetu E_1F_1, yra m, o skaičius, išreiškiantis atkarpos AB ilgį matavimo vienetu E_2F_2,— n. Kokiu skaičiumi išreiškiamas atkarpos E_1F_1 ilgis matavimo vienetu E_2F_2?

324. Sakykime, $\angle hk$ — mažesnysis iš dviejų gretutinių kampų hk ir hl. Įrodykite, kad $\angle hk = 90° - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$, o $\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

325. Penkios tiesės susikerta viename taške (147 pav.). Raskite kampų *1*, *2*, *3*, *4* ir *5* sumą.

326. Duotos šešios paporiui susikertančios tiesės. Per bet kurių dviejų tiesių susikirtimo tašką eina mažiausiai dar viena duotųjų tiesių. Įrodykite, kad visos tiesės eina per vieną tašką.



147 pav.

327. Duoti šeši taškai. Per bet kuriuos du taškus einanti tiesė eina mažiausiai dar per vieną tų taškų. Įrodykite, kad visi taškai yra vienoje tiesėje.

II skyriaus uždaviniai

328. Taškai C_1 ir C_2 yra skirtingose tiesės AB pusėse, $AC_1 = BC_2$, $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Įrodykite, kad tiesė C_1C_2 eina per atkarpos AB vidurį.

329. Jei vieno trikampio kampas, prie jo esanti kraštinė ir kitų dviejų kraštinių suma atitinkamai lygūs kito trikampio kampui, prie jo esančiai kraštinei ir kitų dviejų kraštinių sumai, tai tie trikampiai lygūs. Įrodykite.

330. Vieno trikampio kraštinė ir du kampai lygūs kito trikampio kuriai nors kraštinei ir kuriems nors dviem kampams. Ar tie trikampiai gali būti nelygūs?

331. Vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas lygūs kito trikampio kurioms nors dviem kraštinėms ir kampui. Ar tie trikampiai gali būti nelygūs?

332. Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, $AC = AO = BO = BD$. Įrodykite, kad $OC = OD$.

III ir IV skyriaus uždaviniai

333. Trikampio ABC kampas A lygus α. Tiesės, einančios per priekampių, kurių viršūnės B ir C, pusiaukampines, susikerta taške O. Raskite kampą BOC.

334. Per kiekvieną trikampio viršūnę nubrėžta tiesė, statmena iš tos viršūnės išvestai trikampio pusiaukampinei. Tų tiesių atkarpos ir nagrinėjamo trikampio kraštinės nusako tris trikampius. Įrodykite, kad tų trikampių atitinkami kampai lygūs.

335. Išaiškinkite trikampio rūšį, kai: a) bet kurių dviejų kampų suma didesnė už 90°; b) kiekvienas kampas mažesnis už kitų dviejų kampų sumą.

336. Įrodykite, kad trikampio kampas yra smailusis, statusis arba bukasis, jei iš to kampo viršūnės nubrėžta pusiaukraštinė atitinkamai didesnė, lygi arba mažesnė už pusę prieš ją esančios kraštinės.

337. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas BC, $\angle BAC=80^\circ$, M — jo vidaus taškas. Be to, $\angle MBC=30^\circ$, $\angle MCB=10^\circ$. Raskite kampą AMC.

338. Įrodykite, kad kiekviena atkarpa, kurios galai yra skirtingose trikampio kraštinėse, ne didesnė už didžiausiąją trikampio kraštinę.

339. Atkarpa BB_1 — trikampio ABC pusiaukampinė. Įrodykite, kad $BA>B_1A$ ir $BC>B_1C$.

340. Trikampio ABC viduje parinktas taškas D taip, kad $AD=AB$. Įrodykite, kad $AC>AB$.

341. Trikampio ABC kraštinė AB didesnė už AC. Nubrėžta jo pusiaukampinė AD. Įrodykite, kad $\angle ADB>\angle ADC$ ir $BD>CD$.

342. Įrodykite teoremą: jei trikampio pusiaukampinė yra ir pusiaukraštinė, tai trikampis lygiašonis.

343. Dvi trikampio kraštinės nelygios. Įrodykite, kad iš jų bendros viršūnės nubrėžta pusiaukraštinė su mažesniąja kraštine sudaro didesnį kampą.

344. Trikampio ABC $AB\neq AC$. Nubrėžta atkarpa AM, jungianti viršūnę A ir bet kurį kraštinės BC tašką M. Įrodykite, kad trikampiai AMB ir AMC nelygūs.

345. Per trikampio ABC viršūnę A nubrėžta tiesė, statmena kampo A pusiaukampinei, o iš viršūnės B nuleistas į tą tiesę statmuo BH. Įrodykite, kad trikampio BCH perimetras didesnis už trikampio ABC perimetrą.

346. Trikampio ABC $AB<AC$. Nubrėžtos pusiaukampinė AD ir aukštinė AH. Įrodykite, kad taškas H yra spindulyje DB.

347. Įrodykite, kad nelygiašonio trikampio pusiaukampinės pagrindas yra tarp pusiaukraštinės ir aukštinės pagrindų. Pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė nubrėžtos iš tos pačios viršūnės.

348. Stačiojo trikampio statiniai nelygūs. Įrodykite, kad stačiojo kampo pusiaukampinė kampą tarp aukštinės ir pusiaukraštinės, nubrėžtų iš tos pačios viršūnės, dalija pusiau.

349. Trikampio pusiaukraštinė ir aukštinė, nubrėžtos iš tos pačios trikampio viršūnės, trikampio kampą dalija į tris lygias dalis. Įrodykite, kad tas trikampis statusis.

350. Trikampio ABC aukštinė AA_1 ne mažesnė už kraštinę BC, o aukštinė BB_1 ne mažesnė už kraštinę AC. Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis ir statusis.

Išnagrinėsime brėžimo uždavinio sprendimo skriestuvu ir liniuote dažniausią schemą. Ją sudaro keturios dalys.

1) Uždavinio sprendimo būdo ieškojimas išaiškinant ieškomų ir duotų elementų ryšius. Ta dalis vadinama uždavinio *analize*. Analizė padeda sudaryti uždavinio sprendimo planą.

2) *Brėžimas* pagal numatytą planą.

3) *Įrodymas*, kad nubraižyta figūra tenkina uždavinio sąlygas.

4) Uždavinio *tyrimas*, t. y. išaiškinimas, ar su kiekvienais duomenimis uždavinys turi sprendinį; jei turi, tai kiek sprendinių.

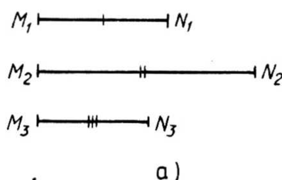
Tais atvejais, kai uždavinys paprastas, kai kurios dalys, pavyzdžiui, analizė ir tyrimas, praleidžiamos. Taip darėme spręsdami paprasčiausius brėžimo uždavinius. Dabar išnagrinėsime sunkesnius uždavinius.

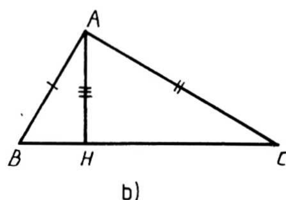
351. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir aukštinė, nubrėžta į trečią kraštinę.

S p r e n d i m a s. Duotos trys atkarpos: M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (148 pav., *a*). Reikia nubraižyti trikampį ABC, kurio dvi kraštinės, pavyzdžiui, AB ir AC, lygios duotoms atkarpoms M_1N_1 ir M_2N_2, aukštinė AH lygi atkarpai M_3N_3. Išspręsime uždavinį pagal aprašytą schemą.

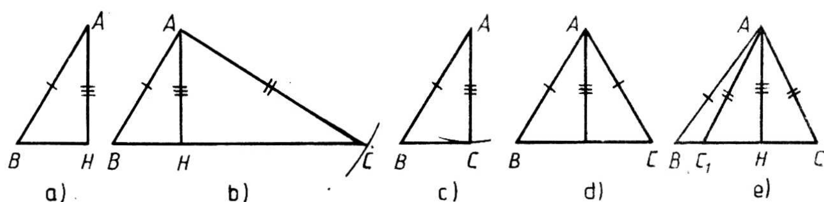
A n a l i z ė. Tarkime, kad ieškomasis trikampis ABC nubraižytas (148 pav., *b*). Tada kraštinė AB ir aukštinė AH yra stačiojo trikampio ABH įžambinė ir statinis. Vadinasi, trikampį ABC galima braižyti pagal šitokį planą: iš pradžių nubraižome statųjį trikampį ABH, po to papildome iki trikampio ABC.

B r ė ž i m a s. Braižome statųjį trikampį ABH, kurio įžambinė AB lygi duotai atkarpai M_1N_1, o statinis AH lygus duo-





148 pav.



149 pav.

tai atkarpai M_3N_3. Kaip tai daroma jau žinome (314 uždavinys, *c*). 149 paveiksle, *a*, pavaizduotas nubraižytasis trikampis ABH. Po to brėžiame apskritimą, kurio spindulys M_2N_2, centras A. Vieną iš to apskritimo ir tiesės BH susikirtimo taškų pažymime raide C. Nubrėžę atkarpas BC ir AC, gauname ieškomąjį trikampį ABC (149 pav., *b*).

Į r o d y m a s. Trikampis ABC tikrai ieškomasis, nes, remiantis brėžimu, kraštinė AB lygi M_1N_1, kraštinė AC lygi M_2N_2, o aukštinė AH lygi M_3N_3, t. y. trikampis ABC atitinka visas uždavinio sąlygas.

T y r i m a s. Nesunku suvokti, kad ne su visomis duotomis atkarpomis M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 uždavinys turi sprendinį. Jei nors viena atkarpų M_1N_1 ir M_2N_2 mažesnė už M_3N_3, tai uždavinys neturi sprendinio, nes pasvirosios AB ir AC negali būti mažesnės už statmenį AH. Uždavinys neturi sprendinio ir tuo atveju, kai $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$ (paaiškinkite, kodėl). Kitais atvejais uždavinys turi sprendinį. Jei $M_1N_1 > M_3N_3$, o $M_2N_2 = M_3N_3$, tai uždavinys turi vienintelį sprendinį: šiuo atveju kraštinė AC sutampa su aukštine AH ir ieškomasis trikampis yra statusis (149 pav., *c*). Jei $M_1N_1 > M_3N_3$, o $M_2N_2 = M_1N_1$, tai uždavinys irgi turi vienintelį sprendinį: šiuo atveju trikampis ABC lygiašonis (149 pav., *d*). Pagaliau jei $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_2N_2 > M_3N_3$ ir $M_1N_1 \neq M_2N_2$, tai uždavinys turi du sprendinius — 149 paveikslo, *e*, trikampiai ABC ir ABC_1.

352. Duoti du taškai A ir B bei per juos neinanti tiesė a. Nubrėžkite tiesės a tašką, vienodai nutolusį nuo taškų A ir B. Ar visada uždavinys turi sprendinį?

353. Nubrėžkite duoto apskritimo tašką, vienodai nutolusį nuo duotos atkarpos galų. Kiek sprendinių gali turėti šis uždavinys?

354. Per tris duotus taškus nubrėžkite apskritimą. Ar visada šis uždavinys turi sprendinį?

355. Taškai A ir B yra vienoje tiesės a pusėje. Nubrėžkite tokį tiesės a tašką M, kad suma $AM+MB$ būtų mažesnė už sumą $AX+XB$; čia X — bet kuris tiesės a taškas, nesutampantis su M.

356. Nubraižykite statųjį trikampį ABC, kai duotas smailusis kampas B ir pusiaukampinė BD.

357. Nubrėžkite duoto apskritimo tašką, vienodai nutolusį nuo dviejų susikertančiųjų tiesių. Kiek sprendinių gali turėti šis uždavinys?

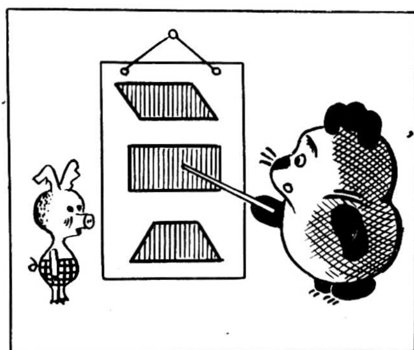
358. Duotos trys paporiui susikertančios tiesės, neinančios per vieną tašką. Nubrėžkite tašką, vienodai nutolusį nuo tų tiesių. Kiek sprendinių turi šis uždavinys?

359. Duotas apskritimas, kurio centras O, ir šalia jo taškas A. Per tašką A nubrėžkite tiesę, kertančią apskritimą tokiuose taškuose B ir C, kad $AB=BC$.

360. Nubraižykite trikampį, kai duotas perimetras, kampas ir aukštinė, nubrėžta iš kito kampo viršūnės.

361. Nubraižykite trikampį, kai duotas perimetras ir du kampai.

362. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė, kampų prie tos kraštinės skirtumas ir kitų dviejų kraštinių suma.



V skyrius

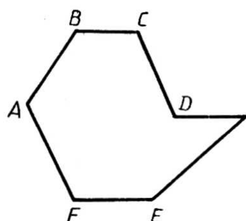
KETURKAMPIAI

§ 1. DAUGIAKAMPIAI

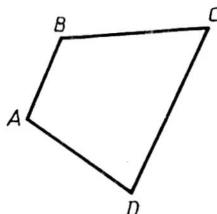
39. Daugiãkampis. Išnagrinėkime figūrą, kurią sudaro atkarpos AB, BC, CD, ..., EF, FA; *grẽtimos* atkarpos (t. y. AB ir BC, BC ir CD, ..., FA ir AB) nėra vienoje tiesėje, o negretimos atkarpos neturi bendrų taškų. Tokia figūra vadinama *daugiãkampiu* (150 pav.). Taškai A, B, C, ..., E, F vadinami *daugiãkampio viršūnėmis*, o atkarpos AB, BC, ..., EF, FA — *daugiãkampio kraštìnėmis*. Visų kraštinių ilgių suma vadinama *daugiãkampio perimetrù*.

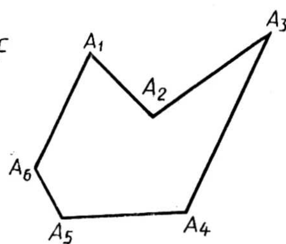
Daugiakampis, kuris turi n viršūnių, vadinamas *n-kam̃piu*; jis turi n kraštinių. Vienas daugiakampio pavyzdžių yra trikampis. 151 paveiksle pavaizduoti keturkampis $ABCD$ ir šešiakampis $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Figūra, kuri pavaizduota 152 paveiksle, nėra daugiakampis, nes negretimos atkarpos C_1C_5 ir C_2C_3 (C_3C_4 ir C_1C_5) turi bendrą tašką.

Daugiakampio viršūnės, kurios priklauso vienai kraštinei, vadinamos *gretimomìs*. Atkarpa, jungianti dvi negretimas viršūnes, vadinama *daugiãkampio įstrižainė*.

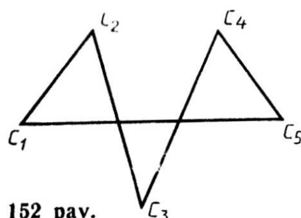


150 pav.

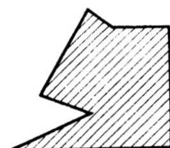
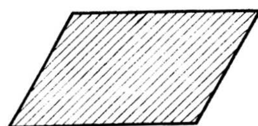




151 pav.



152 pav.

153 pav.

Kiekvienas daugiakampis plokštumą dalija į dvi dalis; viena jų vadinama *daugiakampio vidumì*, kita — *išore*. 153 paveiksle kiekvieno daugiakampio vidus subrukšniuotas. Figura, kurią sudaro daugiakampis ir jo vidus, irgi vadinama daugiakampiu.

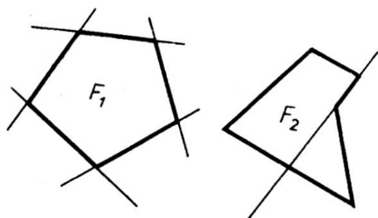
40. Iškilasis daugiakampis. Per kiekvienas dvi gretimas daugiakampio viršūnes nubrėžkime tiesę. Daugiakampis, kuris yra kiekvienos tų tiesių vienoje pusėje, vadinamas *iškilúoju*. 154 paveiksle pavaizduotas iškilasis daugiakampis F_1 ir neiškilasis daugiakampis F_2.

Išnagrinėkime 155 paveiksle, *a*, pavaizduotą iškiląjį n-kampį. Kampai $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ vadinami to *daugiãkampio kampaĩs*. Rasime jų sumą. Tam viršūnę A_1 įstrižainėmis sujunkime su kitomis viršūnėmis. Gausime $n-2$ trikampius (žr. 155 pav., *b*), kurių kampų suma lygi n-kampio kampų sumai. Kiekvieno trikampio kampų suma lygi 180°, todėl daugiakampio $A_1A_2...A_n$ kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180°$.

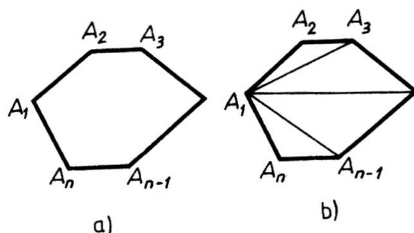
Taigi *iškilojo n-kampio kampų suma lygi* $(n-2)\cdot 180°$.

41. Ketùrkampis. Keturkampis turi keturias viršūnes, keturias kraštines ir dvi įstrižaines (156 pav.). Dvi negretimos keturkampio kraštinės vadinamos *priešingosiomis*. Dvi negretimos viršūnės irgi vadinamos *priešingosiomis*.

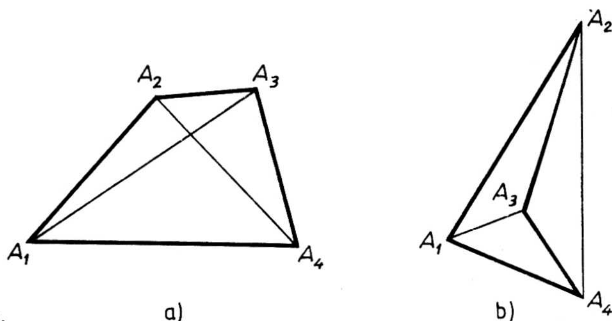
Yra ir iškilųjų, ir neiškilųjų keturkampių. 156 paveiksle, *a*, pavaizduotas iškilasis, o 156 paveiksle, *b*, — neiškilasis keturkampis.



154 pav.



155 pav.



156 pav.

Kiekviena iškilojo keturkampio įstrižainė jį dalija į du trikampius. Viena neiškilojo keturkampio įstrižainė jį irgi dalija į du trikampius (žr. 156 pav., *b*).

Kadangi iškilojo *n*-kampio kampų suma lygi $(n-2)\cdot180°$, tai *iškilojo keturkampio kampų suma lygi* 360°.

Klausimai ir uždaviniai

363. Nubraižykite iškiląjį penkiakampį ir iškiląjį šešiakampį. Pasirinkę po vieną jų viršūnę, nubrėžkite visas iš tų viršūnių išeinančias daugiakampių įstrižaines. Į kiek trikampių tos įstrižainės dalija nubraižytus daugiakampius?

364. Raskite iškilojo: a) penkiakampio; b) šešiakampio; c) dešimtkampio kampų sumą.

365. Kiek kraštinių turi iškilasis daugiakampis, kurio kiekvienas kampas lygus: a) 90°; b) 60°; c) 120°; d) 108°?

366. Keturkampio perimetras lygus 8 cm, viena kraštinė už kitas ilgesnė atitinkamai 3 mm, 4 mm ir 5 mm. Raskite keturkampio kraštines.

367. Keturkampio perimetras lygus 66 cm; pirmoji kraštinė 8 cm ilgesnė už antrąją, tiek pat trumpesnė už trečiąją, o ketvirtoji tris kartus ilgesnė už antrąją. Raskite keturkampio kraštines.

368. Iškilojo keturkampio visi kampai lygūs. Raskite juos.

369. Iškilojo keturkampio $ABCD$ $\angle A=\angle B=\angle C$, o $\angle D=135°$. Raskite kampus A, B ir C.

370. Iškilojo keturkampio kampai proporcingi skaičiams 1, 2, 4, 5. Raskite tuos kampus.

§ 2. LYGIAGRETAINIS IR TRAPECIJA

42. Lygiagretainis

Apibrėžimas. *Lygiagretainiu vadinamas keturkampis, kurio priešingos kraštinės yra lygiagrečios.*

157 paveiksle pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Lygiagretainis yra iškilasis keturkampis (žr. 378 uždavinį).

Išnagrinėkite keletą lygiagretainio savybių.

1°. *Lygiagretainio priešingosios kraštinės yra lygios, priešingieji kampai lygūs.*

Išnagrinėkime lygiagretainį $ABCD$ (158 pav.). Įstrižainė AC jį dalija į du trikampius: ABC ir ADC. Tie trikampiai lygūs (pagal kraštinę ir du prie jos esančius kampus; AC — bendra kraštinė, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, nes jie yra priešiniai kampai, gauti lygiagrečias tieses AB ir DC, AD ir BC perkirtus kirstine AC). Iš jų lygumo išplaukia $AB = CD$, $AD = BC$ ir $\angle B = \angle D$. Kadangi kampai *1* ir *2* bei *3* ir *4* lygūs, tai $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

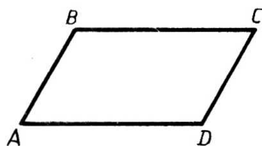
2°. *Lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija pusiau.*

Sakykime, O — lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD susikirtimo taškas (159 pav.). Trikampiai AOB ir COD lygūs (pagal kraštinę ir du prie jos esančius kampus: $AB = CD$, nes jos yra lygiagretainio priešingosios kraštinės, o $\angle 1 = \angle 2$ ir $\angle 3 = \angle 4$ kaip priešiniai kampai, gauti lygiagrečias tieses AB ir CD perkirtus kirstinėmis AC ir BD). Iš jų lygumo išplaukia, kad $AO = OC$ ir $OB = OD$. Tai ir reikėjo įrodyti.

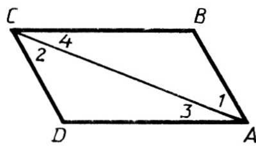
Visas išnagrinėtas savybes vaizduoja 160 paveikslas.

43. Lygiagretainio požymiai. Išnagrinėsime tris lygiagretainio požymius.

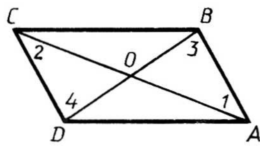
1°. *Jei keturkampio dvi kraštinės lygios ir lygiagrečios, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.*



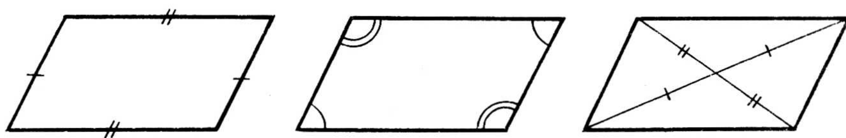
157 pav.



158 pav.



159 pav.



Lygiagretainio savybės

160 pav.

Sakykime, keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD lygiagrečios ir $AB=CD$ (žr. 158 pav.). Nubrėžkime įstrižainę AC. Ji keturkampį padalija į du trikampius: ABC ir CDA. Jie lygūs (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų: AC — bendra kraštinė, $AB=CD$ — duota sąlygoje, $\angle 1=\angle 2$ kaip priešiniai kampai, gauti lygiagrečias tieses AB ir CD perkirtus kirstine AC). Iš trikampių lygumo gauname $\angle 3=\angle 4$. Tačiau kampai *3* ir *4* yra priešiniai kampai, gauti tieses AD ir BC perkirtus kirstine AC, todėl $AD \parallel BC$. Taigi keturkampio $ABCD$ priešingosios kraštinės lygiagrečios, todėl keturkampis $ABCD$ — lygiagretainis.

2°. *Jei keturkampio priešingosios kraštinės lygios, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.*

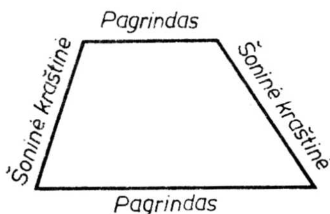
Nubrėžkime nagrinėjamo keturkampio $ABCD$ įstrižainę AC (žr. 158 pav.). Ji keturkampį padalija į trikampius ABC ir CDA. Tie trikampiai lygūs (pagal tris kraštines: AC — bendra kraštinė, $AB=CD$ ir $BC=DA$ — duota sąlygoje). Iš trikampių lygumo gauname $\angle 1=\angle 2$, todėl $AB \parallel CD$. Kadangi $AB=CD$ ir $AB \parallel CD$, tai, remiantis 1° lygiagretainio požymiu, keturkampis $ABCD$ — lygiagretainis.

3°. *Jei keturkampio įstrižainės susikerta ir jų susikirtimo taškas kiekvieną įstrižainę dalija pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.*

Išnagrinėkime keturkampį $ABCD$, kurio įstrižainės AC ir BD susikerta taške O, o taškas O kiekvieną jų dalija pusiau (žr. 159 pav.). Trikampiai AOB ir COD lygūs (remiantis pirmuoju trikampių lygumo požymiu: $AO=OC$, $BO=OD$ — duota sąlygoje, $\angle AOB=\angle COD$, nes jie yra kryžminiai kampai). Iš trikampių lygumo gauname $AB=CD$ ir $\angle 1=\angle 2$.

Iš kampų *1* ir *2* lygumo išplaukia $AB \parallel CD$.

Taigi keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD lygios ir lygiagrečios, todėl, remiantis 1° lygiagretainio požymiu, keturkampis $ABCD$ — lygiagretainis.



161 pav.



a)



b)

162 pav.

44. Trapecija. *Trapecija vadinamas keturkampis, kurio dvi priešingosios kraštinės lygiagrečios, o kitos dvi kraštinės nelygiagrečios.* Trapecijos lygiagrečiosios kraštinės vadinamos *trapecijos pagrindais*, o kitos dvi kraštinės — *šoninėmis kraštinėmis* (161 pav.).

Trapecija, kurios šoninės kraštinės lygios, vadinama *lygiašonė* (162 pav., *a*). Trapecija, kurios vienas kampas status, vadinama *stačiąja* (162 pav., *b*).

Uždaviniai

371. Įrodykite, kad iškilasis keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, kai: a) $\angle BAC = \angle ACD$ ir $\angle BCA = \angle DAC$; b) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

372. Lygiagretainio perimetras lygus 48 cm. Raskite lygiagretainio kraštines, kai: a) viena kraštinė 3 cm ilgesnė už kitą; b) dviejų kraštinių skirtumas lygus 7 cm; c) viena kraštinė du kartus didesnė už kitą.

373. Lygiagretainio $ABCD$ perimetras lygus 50 cm, $\angle C = 30°$, o statmuo BH į tiesę CD lygus 6,5 cm. Raskite lygiagretainio kraštines.

374. Lygiagretainio $ABCD$ kampo A pusiaukampinė kraštinę BC kerta taške K; $BK = 15$ cm, $KC = 9$ cm. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

375. Lygiagretainio vieno kampo pusiaukampinė lygiagretainio kraštinę dalija į 7 cm ir 14 cm atkarpas. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

376. Raskite lygiagretainio $ABCD$ kampus, kai: a) $\angle A = 84°$; b) $\angle A - \angle B = 55°$; c) $\angle A + \angle C = 142°$; d) $\angle A = 2\angle B$; e) $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$.

377. Keturkampis $MNPQ$ — lygiagretainis, NH — statmuo, nuleistas į tiesę MQ, H — kraštinės MQ taškas; $MH = 3$ cm, $HQ =$

$=5$ cm, $\angle MNH=30°$. Raskite lygiagretainio kraštines ir kampus.

378. Įrodykite, kad lygiagretainis yra iškilasis keturkampis.

S p r e n d i m a s. Išnagrinėkime lygiagretainį $ABCD$ (žr. 157 pav.). Įrodysime, kad jis yra kiekvienos tiesės, nubrėžtos per dvi gretimas viršūnes, vienoje pusėje. Pasirinkime, pavyzdžiui, tiesę AB. Kadangi $AB \parallel CD$, tai atkarpa CD ir tiesė AB neturi bendrų taškų. Vadinasi, ta atkarpa yra tiesės AB vienoje pusėje. Tačiau tada atkarpos BC ir AD irgi yra tiesės AB toje pačioje pusėje. Taigi lygiagretainis $ABCD$ yra tiesės AB vienoje pusėje.

379. Iš lygiagretainio $ABCD$ viršūnių B ir D nuleisti statmenys BK ir DM į tiesę AC; $AB \neq BC$, $\angle A$ — smailus. Įrodykite, kad keturkampis $BMDK$ — lygiagretainis.

380. Keturkampio $ABCD$ kraštinėse AB, BC, CD ir DA pažymėti taškai M, N, P ir Q; $AM=CP$, $BN=DQ$, $BM=DP$, $NC=$ $=QA$. Įrodykite, kad $ABCD$ ir $MNPQ$ — lygiagretainiai.

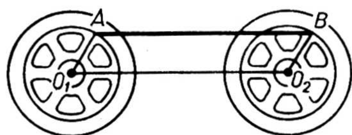
381. 163 paveiksle pavaizduoti du vienodi šilumvežio ratai. Spinduliai O_1A ir O_2B lygūs. Vienas ratas perduoda judesį kitam strypu AB, kurio ilgis lygus atstumui tarp ratų centrų O_1 ir O_2. Įrodykite, kad atkarpos AB ir O_1O_2 arba lygiagrečios, arba yra vienoje tiesėje.

382. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Įrodykite, kad keturkampis $A_1B_1C_1D_1$, kurio viršūnės yra atkarpų OA, OB, OC, OD vidurio taškai — lygiagretainis.

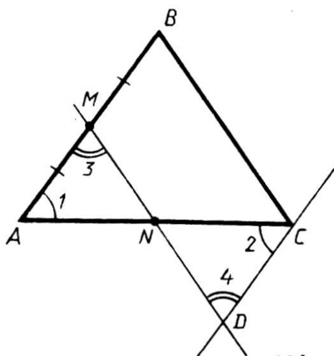
383. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainėje BD pažymėti du taškai: P ir Q; $PB=QD$. Įrodykite, kad keturkampis $APCQ$ yra lygiagretainis.

384. Per trikampio ABC kraštinės AB vidurį M nubrėžta tiesė, lygiagreti kraštinei BC. Ta tiesė kraštinę AC kerta taške N. Įrodykite, kad $AN=NC$.

S p r e n d i m a s. Per tašką C nubrėžkime tiesę, lygiagrečią tiesei AB. Jos ir tiesės MN susikirtimo tašką pažymėkime raide D (164 pav.). Kadangi $AM=MB$ (taip duota sąlygoje), o $MB=CD$ kaip lygiagretainio $BCDM$ priešingosios kraštinės, tai $AM=DC$. Trikampiai AMN ir CDN lygūs remiantis antruoju trikampių lygumo požymiu ($AM=CD$, $\angle 1=\angle 2$ ir $\angle 3=\angle 4$ kaip priešiniai kampai, gauti lygiagrečias tieses AB ir CD perkirtus kirstinėmis AC ir MD), todėl $AN=$ $=NC$.



163 pav.

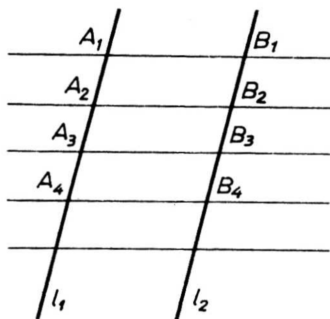


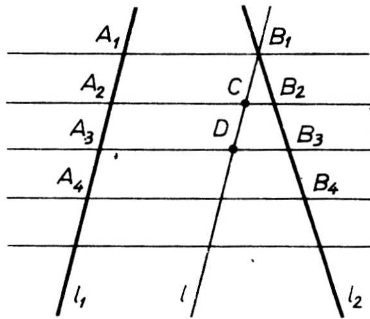
164 pav.

385. Įrodykite *Talio* * *teoremą*: jei vienoje tiesėje nuosekliai atidėsime keletą lygių atkarpų, per jų galus nubrėšime lygiagrečias tieses, kertančias kitą tiesę, tai jos kitoje tiesėje iškirs tarpusavyje lygias atkarpas.

S p r e n d i m a s. Sakykime, tiesėje l_1 atidėtos lygios atkarpos A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... ir per jų galus nubrėžtos lygiagrečios tiesės, kurios tiesę l_2 kerta taškuose B_1, B_2, B_3, B_4, ... (165 pav.). Reikia įrodyti, kad atkarpos B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... tarpusavyje lygios. Įrodysime, pavyzdžiui, kad $B_1B_2=$ $=B_2B_3$.

Iš pradžių išnagrinėkime atvejį, kai tiesės l_1 ir l_2 lygiagrečios (165 pav., *a*). Tada $A_1A_2=B_1B_2$ ir $A_2A_3=B_2B_3$ kaip lygiagretainių $A_1B_1B_2A_2$ ir $A_2B_2B_3A_3$ priešingosios kraštinės. Kadangi $A_1A_2=A_2A_3$, tai $B_1B_2=B_2B_3$.





165 pav.

* Talis Miletietis — senovės graikų mokslininkas (apie 625—547 m. pr. Kr.).

Jei tiesės l_1 ir l_2 nelygiagrečios, tai per tašką B_1 nubrėžkime tiesę l, lygiagrečią tiesei l_1 (165 pav., b). Ji tieses A_2B_2 ir A_3B_3 kirs tam tikruose taškuose C ir D. Kadangi $A_1A_2=A_2A_3$, tai, remiantis tuo, kas jau įrodyta, $B_1C=CD$. Iš čia gauname $B_1B_2=B_2B_3$ (žr. 384 uždavinį). Šitaip galima įrodyti, kad $B_2B_3=B_3B_4$ ir t. t.

386. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškus, lygiagreti trapecijos pagrindams.

387. Trapecijos $ABCD$ pagrindai AD ir BC; $\angle A=36°$, $\angle C=117°$. Raskite trapecijos kampus B ir D.

388. Įrodykite, kad lygiašonės trapecijos: a) kampai prie kiekvieno pagrindo lygūs; b) įstrižainės lygios.

389. Įrodykite, kad trapecija lygiašonė, jei: a) kampai prie pagrindo lygūs; b) įstrižainės lygios.

390. Lygiašonės trapecijos vienas kampas lygus 68°. Raskite kitus trapecijos kampus.

391. Įrodykite, kad vienodomis lygiašonės trapecijos formos plytelėmis galima iškloti parketą.

392. Stačiosios trapecijos pagrindai lygūs a ir b, vienas kampas α. Raskite: a) trapecijos didesniąją šoninę kraštinę, kai $a=4$ cm, $b=7$ cm, $\alpha=60°$; b) trapecijos mažesniąją šoninę kraštinę, kai $a=10$ cm, $b=15$ cm, $\alpha=45°$.

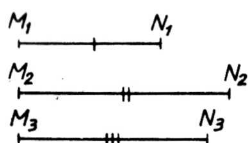
Brėžimo uždaviniai

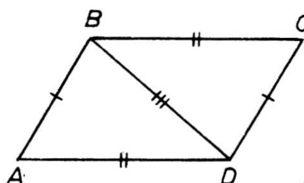
Brėžimo uždavinio sprendimo skriestuvu ir liniuote dalys pateiktos p. 88.

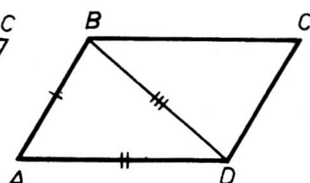
393. Nubraižykite lygiagretainį, kai duotos: a) dvi gretimos kraštinės ir kampas tarp jų; b) dvi įstrižainės ir kampas tarp jų; c) dvi gretimos kraštinės ir viena įstrižainė.

S p r e n d i m a s. c) Patikslinsime, kaip tokį uždavinį reikia suprasti. Duotos trys atkarpos: M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (166 pav., a). Reikia nubraižyti lygiagretainį $ABCD$, kurio gretimos kraštinės, sakykime, AB ir BC, būtų lygios atitinkamai atkarpoms M_1N_1 ir M_2N_2, o viena įstrižainė, pavyzdžiui, BD, lygi atkarpai M_3N_3. Spręsime uždavinį pagal aprašytą schemą.

A n a l i z ė. Tarkime, kad ieškomasis lygiagretainis $ABCD$ nubraižytas (166 pav., b). Tada trikampio BAD kraštinės







166 pav.

lygios duotoms atkarpoms M_1N_1, M_2N_2 ir M_3N_3. Iš to išplaukia uždavinio sprendimo eiga: iš pradžių reikia nubraižyti trikampį ABD, kai duotos visos jo kraštinės, po to tą trikampį papildyti iki lygiagretainio $ABCD$.

Brėžimas. Braižome trikampį ABD, kurio kraštinės AB, AD ir BD atitinkamai lygios atkarpoms M_1N_1, M_2N_2 ir M_3N_3 (kaip tai daroma, žinoma iš ankstesnio kurso). Po to brėžiame tiesę, einančią per tašką B ir lygiagrečią AD, bei tiesę, einančią per tašką D ir lygiagrečią AB (kaip tai daroma, irgi žinoma iš ankstesnio kurso). Tų tiesių susikirtimo tašką pažymėkime raide C (166 pav., c). Keturkampis $ABCD$ yra ieškomasis lygiagretainis.

Įrodymas. Kadangi brėžėme $DC \parallel AB$ ir $BC \parallel AD$, tai $ABCD$ — lygiagretainis. Be to, nubrėžta taip, kad lygiagretainio gretimos kraštinės lygios atkarpoms M_1N_1 ir M_2N_2, o įstrižainė BD — atkarpai M_3N_3. Taigi lygiagretainis $ABCD$ — ieškomasis.

Tyrimas. Jei turint tris atkarpas M_1N_1, M_2N_2 ir M_3N_3 galima nubraižyti trikampį ABD, kurio kraštinės lygios toms atkarpoms, tai galima nubraižyti ir lygiagretainį $ABCD$. Tačiau trikampį ABD ne visada galima nubraižyti. Jei kuri nors iš trijų duotų atkarpų didesnė už kitų dviejų atkarpų sumą arba lygi tai sumai, tai trikampio ABD, taigi ir lygiagretainio $ABCD$ nubraižyti negalima.

Pabandykite savarankiškai įrodyti, kad tuo atveju, kai uždavinys turi sprendinį, tas sprendinys vienintelis (žr. 38 skyrelį).

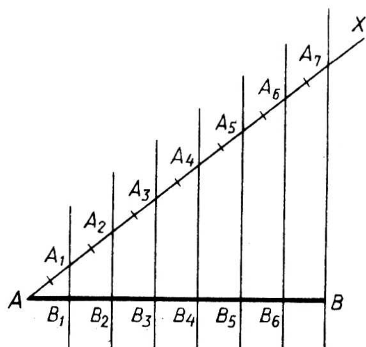
394. Duoti trys taškai A, B ir C, nesantys vienoje tiesėje. Nubraižykite lygiagretainį, kurio trys viršūnės būtų taškai A, B ir C. Kiek tokių lygiagretainių galima nubraižyti?

395. Duotas smailusis kampas hk bei atkarpos P_1Q_1 ir P_2Q_2. Nubraižykite lygiagretainį $ABCD$, tenkinantį šitokias sąlygas:

atstumas tarp lygiagrečiųjų tiesių AB ir DC lygus P_1Q_1, $AB = P_2Q_2$ ir $\angle A = \angle hk$.

396. Duotą atkarpą AB padalykite į n lygių dalių.

S p r e n d i m a s. Nubrėžkime spindulį AX, nesantį tiesėje AB. Jame nuo taško A nuosekliai atidėkime n lygių atkarpų AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (167 pav.), t. y. tiek lygių atkarpų, į kiek lygių dalių reikia padalyti duotą atkarpą AB (167 paveiksle $n=7$). Nubrėžkime tiesę A_nB (A_n — paskutinės atkarpos galas) bei tieses, einančias per taškus A_1, A_2, ..., A_{n-1} ir lygiagrečias tiesei A_nB. Tos tiesės atkarpą AB kirs taškuose B_1, B_2, ..., B_{n-1}, kurie, remiantis Talio teorema (385 uždavinys), atkarpą AB dalija į n lygių dalių.



167 pav.

397. Nubraižykite lygiašonę trapeciją $ABCD$, kai duota: a) pagrindas AD, kampas A ir šoninė kraštinė AB; b) pagrindas BC, šoninė kraštinė AB ir įstrižainė BD.

398. Nubraižykite stačiąją trapeciją $ABCD$, kai duoti pagrindai ir jiems statmena šoninė kraštinė AD.

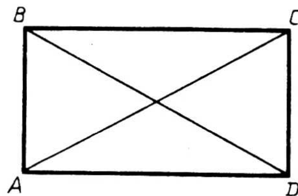
§ 3. STAČIAKAMPIS, ROMBAS, KVADRATAS

45. Stačiãkampis. *Stačiãkampiu vadinamas lygiagretainis, kurio visi kampai statūs.* Kadangi stačiakampis yra lygiagretainis, tai jis turi visas lygiagretainio savybes: stačiakampio priešingosios kraštinės lygios, o įstrižainių susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija pusiau.

Išnagrinėsime stačiakampio ypatingą savybę.

Stačiakampio įstrižainės lygios.

Įsitikinsime. 168 paveiksle pavaizduotas stačiakampis $ABCD$, kurio įstrižainės AC ir BD. Statieji trikampiai ACD ir DBA lygūs (pagal du statinius: $CD=BA$, AD — bendras statinis). Iš to išplaukia, kad tų trikampių įžambinės lygios, t. y. $AC=BD$, ką ir reikėjo įrodyti.



168 pav.

Įrodysime atvirkštinį teiginį (stačiakampio požymį).

Jei lygiagretainio įstrižainės lygios, tai tas lygiagretainis yra stačiakampis.

Sakykime, lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD lygios (žr. 168 pav.). Trikampiai ABD ir DCA lygūs (pagal tris kraštines: $AB=DC$, $BD=CA$, AD — bendra kraštinė). Iš to išplaukia, kad $\angle A=\angle D$. Kadangi lygiagretainio priešingieji kampai lygūs, tai $\angle A=\angle C$ ir $\angle B=\angle D$. Taigi $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$. Lygiagretainis yra iškilasis keturkampis, todėl $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=$ $=360°$. Vadinasi, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$, t. y. lygiagretainis $ABCD$ — stačiakampis.

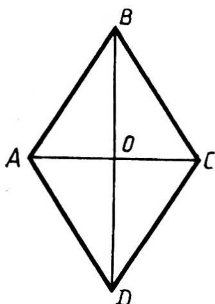
46. Rombas ir kvadratas. *Rombu vadinamas lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios.* Kadangi rombas yra lygiagretainis, tai jis turi visas lygiagretainio savybes. Išnagrinėsime rombo ypatingą savybę.

Rombo įstrižainės statmenos viena kitai ir rombo kampus dalija pusiau.

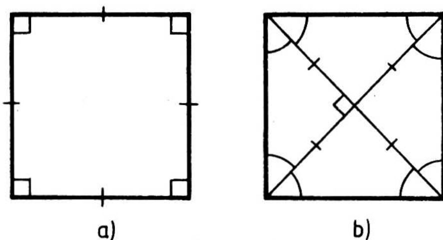
Išnagrinėkime rombą $ABCD$ (169 pav.). Reikia įrodyti, kad $AC\perp BD$ ir kiekviena įstrižainė atitinkamus rombo kampus dalija pusiau. Pavyzdžiui, įrodysime, kad $\angle BAC=\angle DAC$.

Remiantis rombo apibrėžimu, $AB=AD$, todėl trikampis BAD lygiašonis. Kadangi rombas yra lygiagretainis, tai jo įstrižainių susikirtimo taškas tas įstrižaines dalija pusiau. Vadinasi, AO — lygiašonio trikampio BAD pusiaukraštinė, taigi to trikampio aukštinė ir pusiaukampinė, t. y. $AC\perp BD$ ir $\angle BAC=\angle DAC$, ką ir reikėjo įrodyti.

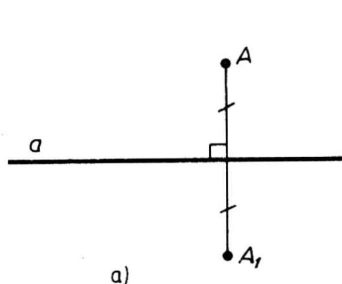
Kvadratu vadinamas stačiakampis, kurio visos kraštinės lygios. Stačiakampis yra lygiagretainis, todėl kvadratas yra lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios, t. y. rombas. Iš to išplaukia,

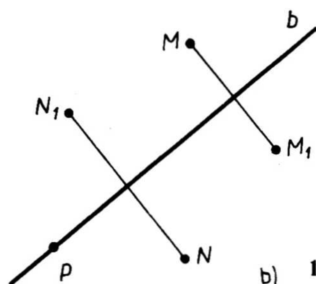


169 pav.



170 pav.





171 pav.

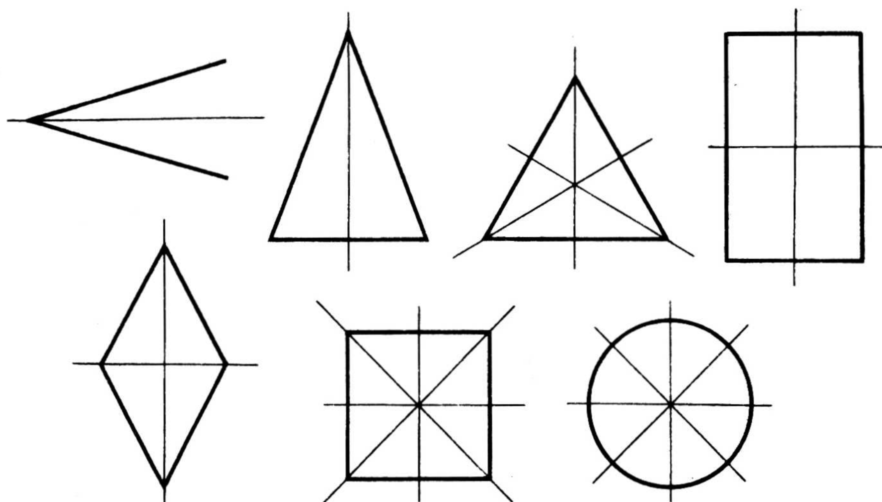
kad kvadratas turi visas stačiakampio ir rombo savybes. Suformuluosime pagrindines kvadrato savybes.

1. *Visi kvadrato kampai statūs* (170 pav., *a*).

2. *Kvadrato įstrižainės lygios, viena kitai statmenos, kvadrato kampus dalija pusiau; įstrižainių susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija pusiau* (170 pav., *b*).

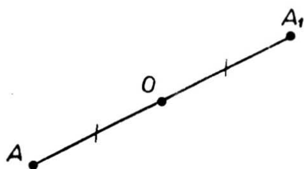
47. Ašinė ir centrinė simetrija. Du taškai A ir A_1 vadinami *simètriškais tiesẽs a ãtžvilgiu,* jei ta tiesė eina per atkarpos AA_1 vidurį ir jai statmena (171 pav., *a*). Laikoma, kad kiekvienas tiesės *a* taškas simetriškas jam pačiam. 171 paveiksle, *b*, taškai M ir M_1, N ir N_1 simetriški tiesės *b* atžvilgiu; taškas P tos tiesės atžvilgiu simetriškas jam pačiam.

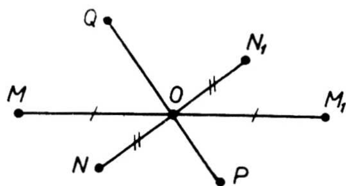
Figūra, sudaryta iš simetriškų tiesės a atžvilgiu taškų, vadinama simètriška tiesẽs a ãtžvilgiu figūrà. Tiesė *a* vadinama *fi-*



Ašies atžvilgiu simetriškos figūros

172 pav.



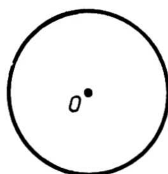


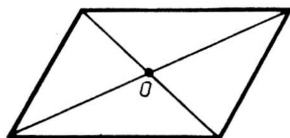
173 pav.

gūros simètrijos ašimì. Dar sakoma, kad tai *simètriška ašiẽs ãtžvilgiu figūrà*. Pateiksime simetriškų ašies atžvilgiu figūrų pavyzdžių (172 pav.). Neištiestinio kampo viena simetrijos ašis — tiesė, kurioje yra to kampo pusiaukampinė. Lygiašonis (bet nelygiakraštis) trikampis irgi turi vieną simetrijos ašį, o lygiakraštis trikampis — tris simetrijos ašis. Stačiakampis ir rombas, kai jie nėra kvadratai, turi po dvi simetrijos ašis; kvadratas turi keturias simetrijos ašis. Apskritimas turi be galo daug simetrijos ašių: kiekviena tiesė, einanti per apskritimo centrą, yra jo simetrijos ašis. Yra figūrų, kurios neturi nė vienos simetrijos ašies, pavyzdžiui, lygiagretainis (kai jis nėra stačiakampis ar rombas), įvairiakraštis trikampis.

Du taškai A ir A_1 vadinami *simètriškais tãško O ãtžvilgiu*, jei taškas O — atkarpos AA_1 vidurys (173 pav., *a*). Laikoma, kad taškas O pats sau simetriškas. 173 paveiksle, *b*, taškai M ir M_1, N ir N_1 simetriški taško O atžvilgiu, o taškai P ir Q nesimetriški to taško atžvilgiu.

Figūra, sudaryta iš simetriškų taško O atžvilgiu taškų, vadinama simètriška tãško O ãtžvilgiu figūrà. Taškas O vadinamas *figūros simètrijos centrù*. Dar sakoma, kad tai *simètriška ceñtro ãtžvilgiu figūrà*. Pavyzdžiui, apskritimas ir lygiagretainis (174 pav.) yra centro atžvilgiu simetriškos figūros. Apskritimo simetrijos centru yra apskritimo centras, o lygiagretainio simet-



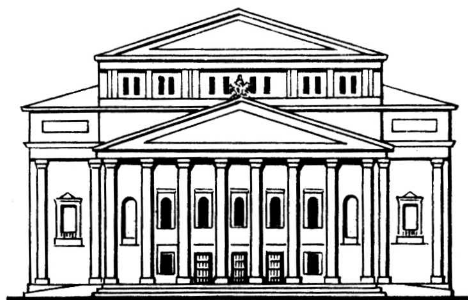


Centro atžvilgiu simetriškos figūros

174 pav.



175 pav.



176 pav.

rijos centru — jo įstrižainių susikirtimo taškas. Tiesė irgi yra simetriška centro atžvilgiu figūra. Tiesė turi be galo daug simetrijos centrų: kiekvienas tiesės taškas yra jos simetrijos centras. Jau minėti apskritimas ir lygiagretainis turi tik po vieną simetrijos centrą (174 paveiksle taškas O). Trikampis yra figūros, neturinčios simetrijos centro, pavyzdys.

Daugelio mūsų aplinkos daiktų atvaizdai plokštumoje turi simetrijos ašį arba simetrijos centrą. Beveik visų medžių lapai ir gėlių žiedlapiai simetriški viduriniojo stiebelio atžvilgiu (175 pav.).

Su simetrija dažnai susiduriame mene, architektūroje, technikoje, buityje. Pavyzdžiui, senų pastatų fasadams būdinga ašinė simetrija (176 pav.). Dažnai simetriški ašies arba centro atžvilgiu yra kilimų, audinių, sienų apmušalų raštai. Simetriškos daugelio mechanizmų detalės, pavyzdžiui, krumpliaračiai.

Klausimai ir uždaviniai

399. Įrodykite, kad lygiagretainis, kurio vienas kampas status, yra stačiakampis.

400. Jei keturkampio visi kampai statūs, tai tas keturkampis yra stačiakampis. Įrodykite.

401. Raskite stačiakampio $ABCD$ perimetrą, kai kampo A pusiaukampinė: a) kraštinę BC dalija į 45,6 cm ir 7,85 cm atkarpas; b) kraštinę DC dalija į 2,7 dm ir 4,5 dm atkarpas.

402. Stačiakampio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Įrodykite, kad trikampiai AOD ir AOB lygiašoniai.

403. Stačiakampio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O; $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ cm. Raskite trikampio AOB perimetrą.

404. Įrodykite, kad stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi pusei įžambinės.

405. Viena rombo įstrižainė lygi jo kraštinei. Raskite: a) rombo kampus; b) kampus, kuriuos rombo įstrižainės sudaro su kraštinėmis.

406. Raskite rombo $ABCD$ perimetrą, kai $\angle B=60°$, $AC=10{,}5$ cm.

407. Vienas rombo kampas lygus 45°. Raskite kampus, kuriuos rombo įstrižainės sudaro su jo kraštinėmis.

408. Įrodykite, kad lygiagretainis yra rombas, jei: a) jo įstrižainės viena kitai statmenos; b) lygiagretainio įstrižainė yra jo kampo pusiaukampinė.

409. Įrodykite, kad rombas, kurio vienas kampas status, yra kvadratas.

410. Ar keturkampis yra kvadratas, jeigu jo įstrižainės: a) lygios ir viena kitai statmenos; b) viena kitai statmenos ir turi bendrą vidurį; c) lygios, viena kitai statmenos ir turi bendrą vidurį?

411. Nubrėžta stačiojo trikampio stataus kampo pusiaukampinė. Per tos pusiaukampinės ir įžambinės susikirtimo tašką nubrėžtos tiesės, lygiagrečios statiniams. Įrodykite, kad gautasis keturkampis yra kvadratas.

412. Lygiašonio trikampio ABC kampas C status, statinis $AC=$ $=12$ cm. Kvadrato $CDEF$ dvi kraštinės yra statiniuose, o viršūnė E — įžambinėje. Raskite kvadrato perimetrą.

413. Nubraižykite stačiakampį, kai: a) duotos dvi gretimos kraštinės; b) duota kraštinė ir įstrižainė; c) duota įstrižainė ir kampas tarp įstrižainių.

414. Nubraižykite rombą, kai: a) duotos abi įstrižainės; b) duota kraštinė ir kampas.

415. Nubraižykite kvadratą, kai duota: a) kraštinė; b) įstrižainė.

416. Duoti du taškai A ir B, simetriški tam tikros tiesės atžvilgiu, ir taškas M. Raskite tašką, simetrišką taškui M tos tiesės atžvilgiu.

417. Kiek simetrijos ašių turi: a) atkarpa; b) tiesė; c) spindulys?

418. Kurios iš raidžių A, B, C, D, E, F, G, O turi simetrijos ašį?

419. Įrodykite, kad tiesė, einanti per stačiakampio priešingųjų kraštinių vidurio taškus, yra jo simetrijos ašis.

420. Įrodykite, kad tiesė, einanti per lygiašonio trikampio pusiaukampinę, nubrėžtą į pagrindą, yra trikampio simetrijos ašis.

421. Duoti taškai A, B ir M. Raskite tašką, simetrišką taškui M atkarpos AB vidurio atžvilgiu.

422. Ar turi simetrijos centrą: a) atkarpa; b) spindulys; c) susikertančiųjų tiesių pora; d) kvadratas?

423. Kurios iš raidžių A, B, C, H, O turi simetrijos centrą?

V SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Paaiškinkite, kokia figūra vadinama daugiakampiu. Kas yra daugiakampio viršūnės, kraštinės, įstrižainės ir perimetras?
2. Koks daugiakampis vadinamas iškiluoju? Paaiškinkite, kokie kampai vadinami iškilojo daugiakampio kampais.
3. Išveskite formulę iškilojo n-kampio kampų sumai apskaičiuoti.
4. Nubraižykite keturkampį, parodykite jo įstrižaines, priešingąsias kraštines ir priešingąsias viršūnes.
5. Kam lygi iškilojo keturkampio kampų suma?
6. Pasakykite lygiagretainio apibrėžimą. Ar lygiagretainis yra iškilasis keturkampis?
7. Įrodykite, kad lygiagretainio priešingosios kraštinės lygios ir priešingieji kampai lygūs.
8. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.
9. Suformuluokite ir įrodykite lygiagretainio požymius.
10. Koks keturkampis vadinamas trapecija? Kaip vadinamos trapecijos kraštinės?
11. Kokia trapecija vadinama lygiašone? stačiąja?
12. Koks keturkampis vadinamas stačiakampiu? Įrodykite, kad stačiakampio įstrižainės lygios.
13. Įrodykite: jei lygiagretainio įstrižainės lygios, tai lygiagretainis yra stačiakampis.
14. Koks keturkampis vadinamas rombu? Įrodykite, kad rombo įstrižainės viena kitai statmenos ir rombo kampus dalija pusiau.
15. Koks keturkampis vadinamas kvadratu? Suformuluokite pagrindines kvadrato savybes.
16. Kokie du taškai vadinami simetriškais duotos tiesės atžvilgiu?
17. Kokia figūra vadinama simetriška duotos tiesės atžvilgiu?

18. Kokie du taškai vadinami simetriškais duoto taško atžvilgiu?
19. Kokia figūra vadinama simetriška duoto taško atžvilgiu?
20. Pasakykite: a) simetriškų ašies atžvilgiu figūrų pavyzdžių; b) simetriškų centro atžvilgiu figūrų pavyzdžių; c) simetriškų ir ašies, ir centro atžvilgiu figūrų pavyzdžių.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

424. Įrodykite: jei ne visi iškilojo keturkampio kampai tarpusavyje lygūs, tai bent vienas jų bukas.

425. Lygiagretainio $ABCD$ perimetras lygus 46 cm, $AB=14$ cm. Kurią lygiagretainio kraštinę kerta kampo A pusiaukampinė? Raskite atkarpas, į kurias ji padalija tą kraštinę.

426. Lygiagretainio kraštinės lygios 10 cm ir 3 cm. Kampų, esančių prie didesniosios kraštinės, pusiaukampinės priešingą kraštinę dalija į tris atkarpas. Raskite tas atkarpas.

427. Per lygiašonio trikampio pagrindo bet kurį tašką nubrėžtos tiesės, lygiagrečios trikampio šoninėms kraštinėms. Įrodykite, kad gauto keturkampio perimetras lygus to trikampio šoninių kraštinių sumai.

428. Lygiagretainio gretimos kraštinės nelygios. Nubrėžtos to lygiagretainio kampų pusiaukampinės. Įrodykite, kad jos susikirsdamos sudaro stačiakampį.

429. Įrodykite: jei kampų, esančių prie kiekvienų dviejų gretimų iškilojo keturkampio kraštinių, suma lygi 180°, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.

430. Įrodykite, kad iškilasis keturkampis, kurio priešingieji kampai lygūs, yra lygiagretainis.

431. Taškas K — trikampio ABC pusiaukraštinės AM vidurys. Tiesė BK kraštinę AC kerta taške D. Įrodykite, kad $AD=\frac{1}{3}AC$.

432. Taškai M ir N — lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AD ir BC vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesės AN ir MC įstrižainę BD dalija į tris lygias dalis.

433. Iš rombo $ABCD$ viršūnės B nuleisti statmenys BK ir BM į tieses AD ir DC. Įrodykite, kad spindulys BD yra kampo KBM pusiaukampinė.

434. Įrodykite, kad rombo įstrižainių susikirtimo taškas vienodai nutolęs nuo rombo kraštinių.

435. Įrodykite, kad atkarpos, jungiančios trikampio viršūnę su bet kuriuo prieš ją esančios kraštinės tašku, vidurys yra atkarpoje, kurios galai yra kitų dviejų kraštinių vidurio taškai.

436. Kvadrato $ABCD$ įstrižainė AC lygi 18,4 cm. Tiesė, einanti per tašką A ir statmena tiesei AC, tieses BC ir CD kerta atitinkamai taškuose M ir N. Raskite MN.

437. Kvadrato $ABCD$ įstrižainėje AC pažymėtas taškas M; $AM=$ $=AB$. Per tašką M nubrėžta tiesė, statmena tiesei AC. Ji tiesę BC kerta taške H. Įrodykite, kad $BH=HM=MC$.

438. Trapecijos $ABCD$, kurios didesnysis pagrindas AD, įstrižainė AC statmena šoninei kraštinei CD, $\angle BAC=\angle CAD$, trapecijos perimetras lygus 20 cm, o $\angle D=60°$. Raskite AD.

439*. Kampų prie vieno trapecijos pagrindo suma lygi 90°. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos pagrindų vidurio taškus, lygi pagrindų skirtumo pusei.

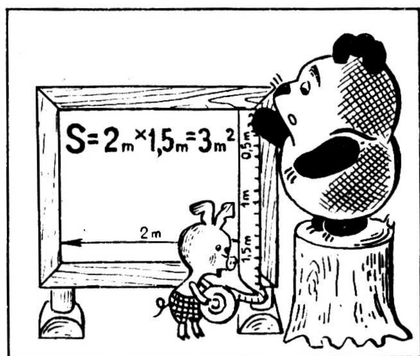
440*. Trikampio išorėje nubraižyti du kvadratai, kurių po vieną kraštinę yra trikampio kraštinės. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti kvadratų kraštinių, išeinančių iš vienos trikampio viršūnės, galus, du kartus didesnė už trikampio pusiaukraštinę, išeinančią iš tos pačios viršūnės.

441. Įrodykite, kad tiesės, kuriose yra rombo įstrižainės, — rombo simetrijos ašys.

442. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas yra jo simetrijos centras.

443. Kiek simetrijos centrų turi lygiagrečių tiesių pora?

444*. Įrodykite: jei figūra turi dvi viena kitai statmenas simetrijos ašis, tai jų susikirtimo taškas yra figūros simetrijos centras.



VI skyrius

PLOTAS

§ 1. DAUGIAKAMPIO PLOTAS

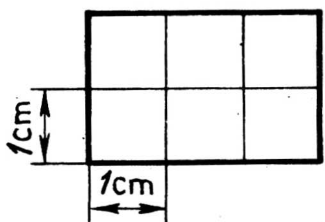
48. Daugiãkampio ploto sąvoka. Ploto sąvoka žinoma iš kasdienės patirties. Kiekvienas supranta šių žodžių prasmę: kambario plotas lygus šešiolika kvadratinių metrų, sodo sklypo plotas — aštuoni arai ir t. t. Šiame skyriuje išnagrinėsime daugiakampio plotą.

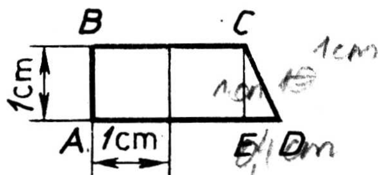
Galima sakyti, kad daugiakampio plotas yra dydis tos plokštumos dalies, kurią jis užima. Plotai, kaip ir atkarpų ilgiai, matuojami pasirinktu matavimo vienetu. Plotų matavimo vienetu pasirenkamas kvadratas, kurio kraštinė lygi atkarpų matavimo vienetui. Pavyzdžiui, jei atkarpų matavimo vienetu pasirinktas centimetras, tai ploto matavimo vienetu laikomas kvadratas, kurio kraštinė 1 cm. Toks kvadratas vadinamas *kvadrãtiniu centimetrù* ir žymimas cm². Panašiai apibrėžiamas *kvadrãtinis mètras* (m²), *kvadrãtinis milimètras* (mm²) ir t. t.

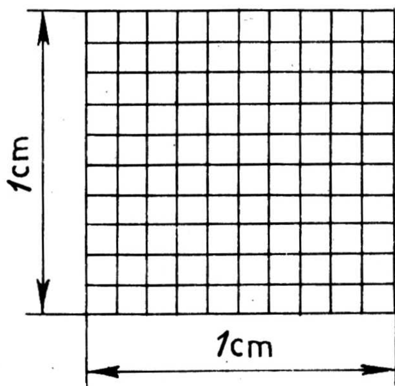
Kai plotų matavimo vienetas pasirinktas, kiekvieno daugiakampio plotas išreiškiamas teigiamu skaičiumi. Tas skaičius rodo, kiek kartų matavimo vienetas ir jo dalys išsitenka nagrinėjamame daugiakampyje. Išnagrinėsime keletą pavyzdžių. 177 paveiksle, *a*, pavaizduotas stačiakampis, kuriame kvadratinis centimetras išsitenka lygiai 6 kartus. Tai reiškia, kad stačiakampio plotas lygus 6 cm². 177 paveiksle, *b*, pavaizduotoje trapecijoje *ABCD* kvadratinis centimetras išsitenka du kartus ir dar lieka trapecijos dalis — trikampis *CDE*, kuriame kvadratinis centimetras nebeišsitenka. Norint išmatuoti to trikampio plotą, reikia panaudoti kvadratinio centimetro dalis, pavyzdžiui, kvadratinį milimetrą. Jis yra 0,01 kvadratinio centimetro dalis. Tai pavaiz-

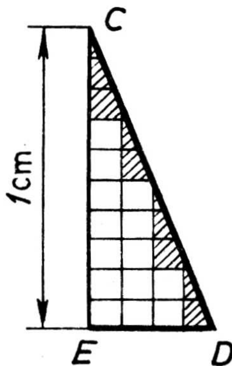
duota 177 paveiksle, *c*; čia kvadratinis centimetras padalytas į 100 kvadratinių milimetrų (kad būtų vaizdžiau, šis ir 177 paveikslas, *d*, nubraižytas didesniu masteliu). 177 paveiksle, *d*, matome, kad trikampyje *CDE* kvadratinis milimetras išsitenka 14 kartų, tačiau dar lieka to trikampio dalis (ji paveiksle subrūkšniuota), kurioje kvadratinis milimetras nebeišsitenka. Todėl galime sakyti, kad trapecijos *ABCD* plotas apytiksliai lygus 2,14 cm^2. Likusią trikampio *CDE* dalį galima matuoti smulkesne kvadratinio centimetro dalimi ir gauti tikslesnę ploto reikšmę. Aprašytąjį matavimą galima ir toliau tęsti, tačiau praktiškai taip daryti nepatogu. Dažniausiai išmatuojamos tik tam tikros su daugiakampiu susijusios atkarpos, o daugiakampių plotai apskaičiuojami taikant tinkamas formules. Išnagrinėsime plotų savybes, kuriomis grindžiamas tų formulių gavimas.

Pirmiausia aišku, kad lygiuose daugiakampiuose ploto matavimo vienetas ir jo dalys išsitenka tą patį skaičių kartų, t. y. plotui būdinga šitokia savybė.

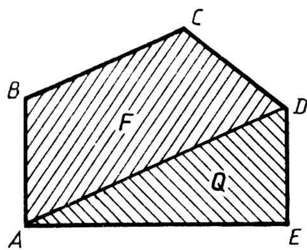


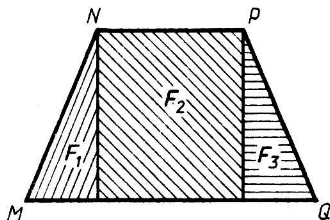






177 pav.





178 pav.

1^0. *Lygių daugiakampių plotai lygūs.*

Sakykime, daugiakampis yra sudarytas iš keleto daugiakampių (laikysime, kad bet kurie du iš daugiakampį sudarančių daugiakampių neturi bendrų vidaus taškų; žr. 178 paveikslą). Aišku, kad plokštumos dalis, kurią užima visas daugiakampis, lygi tų plokštumos dalių, kurias užima jį sudarantys daugiakampiai, sumai. Taigi galime suformuluoti šitokią savybę.

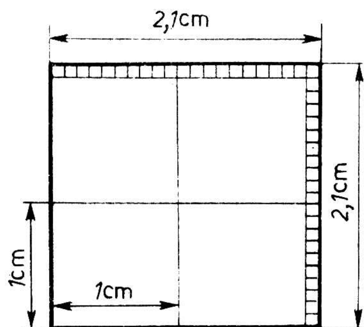
2^0. *Jei daugiakampis yra sudarytas iš keleto daugiakampių, tai jo plotas lygus tų daugiakampių plotų sumai.*

1^0 ir 2^0 savybės vadinamos *pagrindinėmis plóto savýbėmis.* Priminsime, kad panašias savybes turi ir atkarpų ilgiai.

Be šių ploto savybių dar remsimės šitokia ploto savybe.

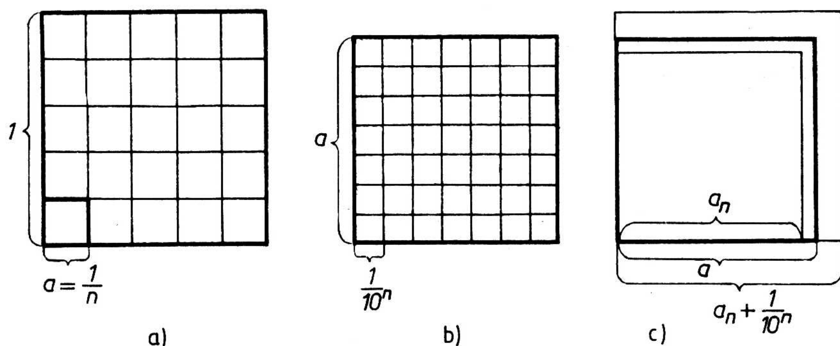
3^0. *Kvadrato plotas lygus jo kraštinės kvadratui.*

Trumpą šios savybės formuluotę reikia suprasti šitaip. Jei kvadrato kraštinė pasirinktuoju atkarpų matavimo vienetu išreiškiama skaičiumi a, tai kvadrato plotas išreiškiamas skaičiumi a^2. 179 paveiksle pavaizduotas kvadratas, kurio kraštinė lygi 2,1 cm. Jis sudarytas iš keturių kvadratinių centimetrų ir keturiasdešimt vieno kvadratinio milimetro. Taigi to kvadrato plotas lygus 4,41 cm^2, o tai lygu jo kraštinės kvadratui: $4{,}41 = (2{,}1)^2$. Dabar 3^0 savybę įrodysime.



179 pav.

49*. Kvadrãto plotas. Įrodysime, kad kvadrato, kurio kraštinė a, plotas S lygus a^2.



180 pav.

Pradėkime nuo atvejo $a=\frac{1}{n}$; čia n — sveikasis skaičius. Kvadratą, kurio kraštinė lygi 1, padalykime į n^2 lygių kvadratų taip, kaip parodyta 180 paveiksle, *a* (tame paveiksle $n=5$). Kadangi didžiojo kvadrato plotas lygus 1, tai kiekvieno mažojo kvadrato plotas lygus $\frac{1}{n^2}$. Kiekvieno mažojo kvadrato kraštinė lygi $\frac{1}{n}$, t. y. lygi a. Taigi

$$S=\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{n}\right)^2=a^2. \qquad (1)$$

Sakykime, skaičius a yra baigtinė dešimtainė trupmena, turinti n ženklų po kablelio (skyrium imant, a gali būti ir sveikasis skaičius; tada $n=0$). Tada $m=a\cdot 10^n$ yra sveikasis skaičius. Duotąjį kvadratą, kurio kraštinė a, padalykime į m^2 lygių kvadratų taip, kaip parodyta 180 paveiksle, *b* (tame paveiksle $m=7$). Tada kiekviena nagrinėjamo kvadrato kraštinė bus padalyta į m lygių dalių, todėl kiekviena mažojo kvadrato kraštinė lygi $\frac{a}{m}=\frac{a}{a\cdot 10^n}=$ $=\frac{1}{10^n}$. Remiantis (1) formule, kiekvieno mažojo kvadrato plotas lygus $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Vadinasi, nagrinėjamo kvadrato plotas S lygus

$$m^2\left(\frac{1}{10^n}\right)^2=\left(\frac{m}{10^n}\right)^2=\left(\frac{a\cdot 10^n}{10^n}\right)^2=a^2.$$

Pagaliau tarkime, kad skaičius a yra begalinė dešimtainė trupmena. Išnagrinėkime skaičių a_n, kuris gaunamas iš skaičiaus a atmetus visus dešimtainius ženklus po kablelio, pradedant $(n+$

$+1)$-uoju. Kadangi skaičius a nuo a_n skiriasi ne daugiau kaip $\frac{1}{10^n}$ vieneto, tai $a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}$. Iš čia

$$a_n^2 \leqslant a^2 \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Aišku, kad nagrinėjamo kvadrato plotas S yra tarp kvadratų, kurių kraštinės a_n ir $a_n + \frac{1}{10^n}$ (180 pav., c), plotų, t. y. tarp a_n^2 ir $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2 \leqslant S \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

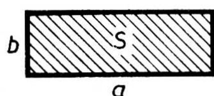
Skaičių n neribotai didinkime. Tada skaičius $\frac{1}{10^n}$ pasidarys kiek norima mažas, todėl skaičius $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ kiek norima mažai skirsis nuo skaičiaus a_n^2. Iš (2) ir (3) nelygybių išplaukia, kad skaičius S kiek norima mažai skiriasi nuo skaičiaus a^2. Vadinasi, jie lygūs, t. y. $S = a^2$, ką ir reikėjo įrodyti.

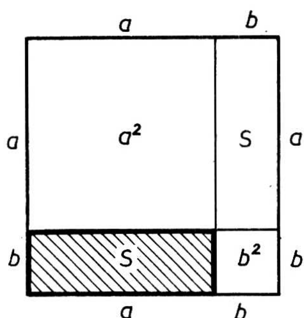
50. Stačiãkampio plotas

T e o r e m a. ***Stačiakampio plotas lygus jo gretimųjų kraštinių sandaugai.***

Į r o d y m a s. Išnagrinėkime stačiakampį, kurio kraštinės a, b ir plotas S (181 pav., a). Įrodysime, kad $S = ab$.

Stačiakampį papildykime iki kvadrato, kurio kraštinė $a + b$, kaip parodyta 181 paveiksle, b. Remiantis 3⁰ savybe, to kvadrato plotas lygus $(a+b)^2$.





181 pav.

Antra vertus, tas kvadratas sudarytas iš nagrinėjamo stačiakampio, kurio plotas S, jam lygaus stačiakampio, kurio plotas irgi S (remiantis 1^0 ploto savybe), ir dviejų kvadratų, kurių plotai a^2 ir b^2 (remiantis 3^0 ploto savybe). Remdamiesi 2^0 ploto savybe gauname:

$$(a+b)^2 = S + S + a^2 + b^2,$$

arba

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2.$$

Iš čia gauname $S = ab$. Teorema įrodyta.

Klausimai ir uždaviniai

445. Iš popieriaus iškirpkite du lygius stačiuosius trikampius ir iš jų sudarykite: a) lygiašonį trikampį; b) stačiakampį; c) lygiagretainį, bet ne stačiakampį. Palyginkite gautųjų figūrų plotus.

446. Nubraižykite kvadratą, jį laikykite ploto matavimo vienetu. Po to nubraižykite: a) kvadratą, kurio plotas išreiškiamas skaičiumi 4; b) stačiakampį, bet ne kvadratą, kurio plotas išreiškiamas skaičiumi 4; c) trikampį, kurio plotas išreiškiamas skaičiumi 2.

447. Nubraižykite lygiagretainį $ABCD$ ir pažymėkite tašką M, simetrišką taškui D taško C atžvilgiu. Įrodykite, kad $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

448. Atkarpa AD — stačiakampio $ABCD$ kraštinė. Nubraižytas trikampis ADE, kurio kraštinės AE ir DE atkarpą BC kerta taškuose M ir N; taškas M — atkarpos AE vidurys. Įrodykite, kad $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

449. Raskite kvadrato plotą. Jo kraštinė lygi: a) 1,2 cm; b) $\frac{3}{4}$ dm; c) $3\sqrt{2}$ m.

450. Raskite kvadrato kraštinę. Jo plotas lygus: a) 16 cm^2; b) 2,25 dm^2; c) 12 m^2.

451. Kvadrato plotas lygus 24 cm^2. To kvadrato plotą išreikškite: a) kvadratiniais milimetrais; b) kvadratiniais decimetrais.

452. Sakykime, a ir b — stačiakampio gretimos kraštinės, S — jo plotas. Apskaičiuokite: a) S, kai $a = 8{,}5$ cm, $b = 3{,}2$ cm; b) S, kai $a = 2\sqrt{2}$ cm, $b = 3$ cm; c) b, kai $a = 32$ cm, $S = 684{,}8$ cm^2; d) a, kai $b = 4{,}5$ cm, $S = 12{,}15$ cm^2.

453. Kaip pasikeis stačiakampio plotas, jei: a) vieną priešingųjų kraštinių porą padidinsime du kartus; b) kiekvieną kraštinę padidinsime du kartus; c) vieną priešingųjų kraštinių porą padidinsime du kartus, o kitą — sumažinsime du kartus?

454. Raskite stačiakampio kraštines, kai: a) jo plotas lygus 250 cm^2, o viena kraštinė 2,5 karto didesnė už kitą; b) jo plotas lygus 9 m^2, o perimetras lygus 12 m.

455. Kambarys — stačiakampio formos; jo kraštinės lygios 5,5 m ir 6 m. Kambaryje reikia sudėti parketą. Parketo lentelės yra stačiakampės; lentelės ilgis 30 cm, plotis 5 cm. Kiek reikia tokių lentelių?

456. Kvadrato formos koklinės plytelės kraštinė lygi 15 cm. Reikia iškloti stačiakampės sienos dalį; jos kraštinės lygios 3 m ir 2,7 m. Kiek reikia plytelių?

457. Kvadrato plotas lygus stačiakampio, kurio kraštinės 8 m ir 18 m, plotui. Raskite kvadrato kraštinę.

458. Du žemės sklypai aptverti vienodo ilgio tvora. Pirmasis sklypas — stačiakampio formos; jo kraštinės lygios 220 m ir 160 m. Antrasis sklypas — kvadrato formos. Katro sklypo plotas didesnis ir kiek?

§ 2. LYGIAGRETAINIO, TRIKAMPIO IR TRAPECIJOS PLOTAI

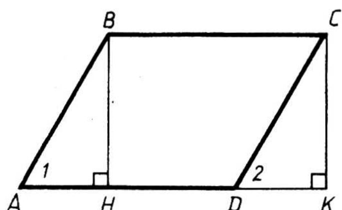
51. Lygiagretainio plotas. Vieną lygiagretainio kraštinę vadinsime *pagrindu*. Statmenį, nuleistą iš priešingos kraštinės bet kurio taško į tiesę, kurioje yra pagrindas, vadinsime *lygiagretainio aukštinė*.

Teorema. ***Lygiagretainio plotas lygus jo pagrindo ir aukštinės sandaugai.***

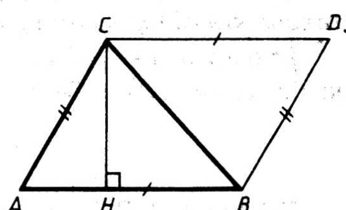
Įrodymas. Išnagrinėkime lygiagretainį $ABCD$, kurio plotas S. Kraštinę AD laikykime pagrindu; nubrėžkime aukštines BH ir CK (182 pav.). Reikia įrodyti, kad

$$S=AD\cdot BH.$$

Iš pradžių įrodysime, kad stačiakampio $HBCK$ plotas irgi lygus S. Trapecija $ABCK$ sudaryta iš lygiagretainio $ABCD$ ir trikampio DCK. Antra vertus, ji sudaryta iš stačiakampio $HBCK$ ir trikampio ABH. Tačiau statieji trikampiai DCK ir ABH lygūs pagal įžambinę ir smailųjį kampą (jų įžambinės AB ir CD lygios kaip lygiagretainio priešingosios kraštinės, o kampai 1 ir 2 lygūs



182 pav.



183 pav.

kaip atitinkamieji kampai, gauti lygiagrečias tieses AB ir CD perkirtus kirstine AD), todėl jų plotai lygūs. Vadinasi, lygiagretainio $ABCD$ ir stačiakampio $HBCK$ plotai irgi lygūs, t. y. stačiakampio $HBCK$ plotas lygus S. Remiantis stačiakampio ploto teorema, $S=BC \cdot BH$. Kadangi $BC=AD$, tai $S=AD \cdot BH$. Teorema įrodyta.

52. Trikampio plotas. Viena trikampio kraštinė dažnai vadinama jo *pãgrindu*. Kai pagrindas pasirinktas, sakydami „aukštinė" turime galvoje į pagrindą nubrėžtą aukštinę.

Teorema. ***Trikampio plotas lygus jo pagrindo ir aukštinės sandaugos pusei.***

Įrodymas. Sakykime, S — trikampio ABC (183 pav.) plotas. Trikampio pagrindu pasirinkime kraštinę AB ir nubrėžkime aukštinę CH. Įrodysime, kad

$$S=\frac{1}{2} AB \cdot CH.$$

Trikampį ABC papildykime iki lygiagretainio $ABDC$ taip, kaip parodyta 183 paveiksle. Trikampiai ABC ir DCB lygūs (pagal tris kraštines: BC — jų bendra kraštinė, $AB=CD$ ir $AC=BD$ kaip lygiagretainio $ABCD$ priešingosios kraštinės), todėl jų plotai lygūs. Vadinasi, trikampio ABC plotas S lygus pusei lygiagretainio $ABDC$ ploto, t. y. $S=\frac{1}{2} AB \cdot CH$. Teorema įrodyta.

1 išvada. *Stačiojo trikampio plotas lygus jo statinių sandaugos pusei.*

2 išvada. *Jei dviejų trikampių aukštinės lygios, tai jų plotų santykis lygus pagrindų santykiui.*

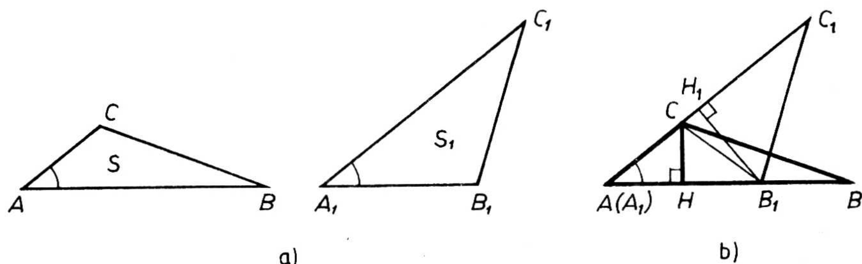
Remdamiesi 2 išvada įrodysime trikampių, turinčių po lygų kampą, plotų santykio teoremą.

Teorema. ***Jei vieno trikampio kampas lygus kito trikampio kampui, tai tų trikampių plotų santykis lygus tuos kampus sudarančių kraštinių sandaugų santykiui.***

Įrodymas. Sakykime, S ir S_1 — trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių $\angle A=\angle A_1$ (184 pav., *a*), plotai. Įrodysime, kad

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Trikampį $A_1B_1C_1$ ant trikampio ABC uždėkime taip, kad viršūnė A_1 sutaptų su viršūne A, o kraštinės A_1B_1 ir A_1C_1 atsidurtų



184 pav.

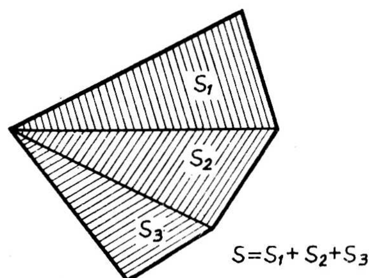
atitinkamai spinduliuose AB ir AC (184 pav., *b*). Trikampiai ABC ir AB_1C turi bendrą aukštinę CH, todėl $\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$. Trikampiai AB_1C ir AB_1C_1 irgi turi bendrą aukštinę — B_1H_1, todėl $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$. Gautas lygybes sudauginę randame:

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}, \text{ arba } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

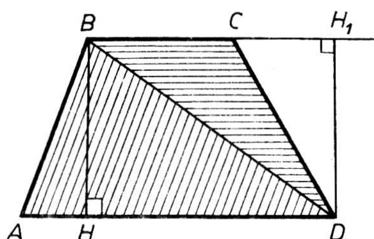
Teorema įrodyta.

53. Trapecijos plotas. Norėdami apskaičiuoti bet kurio daugiakampio plotą dažnai darome šitaip. Daugiakampį padalijame į trikampius ir randame kiekvieno trikampio plotą. Tų trikampių plotų suma lygi turimo daugiakampio plotui (185 pav.). Taip sudarysime formulę trapecijos plotui apskaičiuoti. *Trapècijos aukštinė* vadinsime statmenį, nuleistą iš jos vieno pagrindo bet kurio taško į tiesę, kurioje yra kitas pagrindas. 186 paveiksle atkarpa BH (ir atkarpa DH_1) — trapecijos $ABCD$ aukštinė.

T e o r e m a. ***Trapecijos plotas lygus jos pagrindų sumos ir aukštinės sandaugos pusei.***



185 pav.



186 pav.

Įrodymas. Išnagrinėkime trapeciją $ABCD$, kurios pagrindai AD ir BC, aukštinė BH ir plotas S (186 pav.). Įrodysime, kad

$$S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH.$$

Įstrižainė BD trapeciją dalija į du trikampius: ABD ir BCD. Todėl $S=S_{ABD}+S_{BCD}$.

Atkarpos AD ir BH yra trikampio ABD pagrindas ir aukštinė, o atkarpos BC ir DH_1 — trikampio BCD pagrindas ir aukštinė, todėl $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BH$, $S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DH_1$. Kadangi $DH_1=BH$, tai $S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot BH$. Taigi

$$S=\frac{1}{2}AD\cdot BH+\frac{1}{2}BC\cdot BH=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH.$$

Teorema įrodyta.

Uždaviniai

459. Sakykime, a — lygiagretainio pagrindas, h — aukštinė, S — plotas. Raskite: a) S, kai $a=15$ cm, $h=12$ cm; b) a, kai $S=34$ cm², $h=8{,}5$ cm; c) a, kai $S=162$ cm², $h=\frac{1}{2}a$; d) h, kai $h=3a$, $S=27$.

460. Lygiagretainio įstrižainė lygi 13 cm ir statmena kraštinei, kuri lygi 12 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.

461. Lygiagretainio gretimos kraštinės lygios 12 cm ir 14 cm, o jo smailusis kampas lygus 30°. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.

462. Rombo kraštinė lygi 6 cm, o vienas kampas lygus 150°. Apskaičiuokite rombo plotą.

463. Lygiagretainio kraštinė lygi 8,1 cm, o įstrižainė, lygi 14 cm, su ja sudaro 30° kampą. Raskite lygiagretainio plotą.

464. Sakykime, a ir b — lygiagretainio gretimosios kraštinės, o h_1 ir h_2 — jo aukštinės. Raskite: a) h_2, kai $a=18$ cm, $b=30$ cm, $h_1=6$ cm, $h_2>h_1$; b) h_1, kai $a=10$ cm, $b=15$ cm, $h_2=6$ cm, $h_2>h_1$; c) h_1 ir h_2, kai $S=54$ cm², $a=4{,}5$ cm, $b=6$ cm.

465. Lygiagretainio smailusis kampas lygus 30°, o aukštinės, nuleistos iš bukojo kampo viršūnės, lygios 2 cm ir 3 cm. Raskite lygiagretainio plotą.

466. Lygiagretainio įstrižainė lygi jo kraštinei. Jo didesnioji kraštinė lygi 15,2 cm, o vienas kampas lygus 45°. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.

467. Kvadrato ir rombo, kuris nėra kvadratas, perimetrai lygūs. Palyginkite jų plotus.

468. Sakykime, a — trikampio pagrindas, h — aukštinė, S — plotas. Raskite: a) S, kai $a=7$ cm, $h=11$ cm; b) S, kai $a=2\sqrt{3}$ cm, $h=5$ cm; c) h, kai $S=37{,}8$ cm^2, $a=14$ cm; d) a, kai $S=12$ cm^2, $h=3\sqrt{2}$ cm.

469. Trikampio ABC kraštinės AB ir BC lygios 16 cm ir 22 cm, o aukštinė, nuleista į kraštinę AB, lygi 11 cm. Raskite aukštinę, nuleistą į kraštinę BC.

470. Dvi trikampio kraštinės lygios 7,5 cm ir 3,2 cm. Aukštinė, nuleista į didesniąją kraštinę, lygi 2,4 cm. Raskite aukštinę, nuleistą į mažesniąją kraštinę.

471. Raskite stačiojo trikampio plotą, kai statiniai lygūs: a) 4 cm ir 11 cm; b) 1,2 dm ir 3 dm.

472. Stačiojo trikampio plotas lygus 168 cm^2, jo statinių ilgių santykis lygus $\frac{7}{12}$. Raskite statinius.

473. Per trikampio ABC viršūnę C nubrėžta tiesė m, lygiagreti kraštinei AB. Įrodykite, kad visų trikampių, kurių pagrindas AB, o trečioji viršūnė yra tiesėje m, plotai lygūs.

474. Palyginkite dviejų trikampių, į kuriuos trikampį padalija jo pusiaukraštinė, plotus.

475. Nubraižykite trikampį ABC. Per viršūnę A nubrėžkite dvi tieses, kurios tą trikampį padalytų į tris vienodo ploto trikampius.

476. Įrodykite, kad rombo plotas lygus jo įstrižainių sandaugos pusei. Apskaičiuokite rombo plotą, kai jo įstrižainės lygios: a) 3,2 dm ir 14 cm; b) 4,6 dm ir 2 dm.

477. Viena rombo įstrižainė 1,5 karto didesnė už kitą, o rombo plotas lygus 27 cm^2. Raskite rombo įstrižaines.

478. Iškilojo keturkampio įstrižainės viena kitai statmenos. Įrodykite, kad to keturkampio plotas lygus įstrižainių sandaugos pusei.

479. Taškai D ir E yra trikampio ABC kraštinėse AB ir AC. Raskite: a) S_{ADE}, kai $AB=5$ cm, $AC=6$ cm, $AD=3$ cm, $AE=2$ cm, $S_{ABC}=10$ cm^2; b) AD, kai $AB=8$ cm, $AC=3$ cm, $AE=2$ cm, $S_{ABC}=10$ cm^2, $S_{ADE}=2$ cm^2.

480. Raskite trapecijos $ABCD$, kurios pagrindai AB ir CD, plotą, kai: a) $AB=21$ cm, $CD=17$ cm, aukštinė BH lygi 7 cm; b) $\angle D=30°$, $AB=2$ cm, $CD=10$ cm, $DA=8$ cm; c) $BC \perp AB$, $AB=5$ cm, $BC=8$ cm, $CD=13$ cm.

481. Stačiosios trapecijos dvi mažiausios kraštinės lygios 6 cm, o didžiausias kampas lygus 135°. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

482. Lygiašonės trapecijos bukasis kampas lygus 135°, o iš to kampo viršūnės nuleista aukštinė trapecijos didesnįjį pagrindą dalija į 1,4 cm ir 3,4 cm atkarpas. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

§ 3. PITAGORO TEOREMA

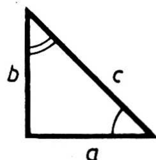
54. Pitagòro teoremà. Remdamiesi daugiakampių plotų savybėmis rasime nuostabų ryšį, siejantį stačiojo trikampio įžambinę ir statinius. Teorema, kurią įrodysime, vadinama *Pitagòro teoremà* ir yra svarbiausia geometrijos teorema.

T e o r e m a. ***Stačiojo trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.***

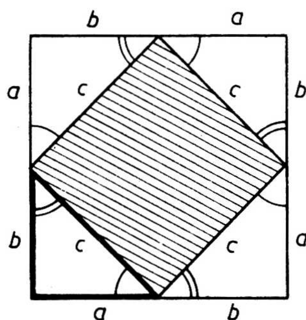
Į r o d y m a s. Išnagrinėkime statųjį trikampį, kurio statiniai a, b ir įžambinė c (187 pav., a). Įrodysime, kad $c^2=a^2+b^2$.

Trikampį papildykime iki kvadrato, kurio kraštinė $a+b$, taip, kaip parodyta 187 paveiksle, b. To kvadrato plotas S lygus $(a+b)^2$. Antra vertus, tas kvadratas yra sudarytas iš keturių lygių stačiųjų trikampių, kurių kiekvieno plotas lygus $\frac{1}{2}a\cdot b$, ir kvadrato, kurio kraštinė c, todėl

$$S=4\cdot\frac{1}{2}ab+c^2=2ab+c^2.$$



a)



b) $(a+b)^2=4(\frac{1}{2}ab)+c^2$ 187 pav.



Senovės graikų mokslininkas Pitagoras (VI a. pr. Kr.)

Taigi

$$(a+b)^2=2ab+c^2.$$

Iš čia

$$c^2=a^2+b^2.$$

Teorema įrodyta.

Įdomi Pitagoro teoremos istorija. Nors teorema pavadinta Pitagoro vardu, ji buvo žinoma gerokai anksčiau. Babiloniečių tekstuose ši teorema randama apie 1200 metų iki Pitagoro. Galbūt tada ji dar nebuvo įrodyta, nors pats ryšys, siejantis įžambinę ir statinius, buvo aptiktas praktiškai matuojant. Gali būti, kad Pitagoras tai įrodė. Pasak senovės legendos, atradimo proga Pitagoras dievams paaukojo jautį, kiti šaltiniai teigia — net šimtą jaučių. Vėlesniais šimtmečiais buvo pateikti įvairūs kiti Pitagoro teoremos įrodymai. Dabar jų priskaičiuojama per šimtą. Vieną jų jau išnagrinėjome, su dar vienu susipažinsime kitame skyriuje (578 uždavinys). Daug žinomų praeities mąstytojų ir rašytojų yra įvairiai minėję tą nuostabią teoremą.

55. Pitagoro teoremai atvirkštinė teorema

Teorema. ***Jei trikampio vienos kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai, tai trikampis statusis.***

Įrodymas. Išnagrinėkime trikampį ABC, kurio $AB^2=AC^2+BC^2$. Įrodysime, kad kampas C status. Išnagrinėkime statųjį trikampį $A_1B_1C_1$, kurio statusis kampas — C_1, o $A_1C_1=AC$, $B_1C_1=BC$. Remiantis Pitagoro teorema, $A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2$, vadinasi, $A_1B_1^2=AC^2+BC^2$.

Tačiau $AC^2+BC^2=AB^2$ — taip duota teoremos sąlygoje. Vadinasi, $A_1B_1^2=AB^2$. Iš čia $A_1B_1=AB$. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs pagal tris kraštines, todėl $\angle C=\angle C_1$, t. y. trikampis ABC statusis, jo statusis kampas C. Teorema įrodyta.

Remiantis Pitagoro teoremai atvirkštine teorema, trikampis, kurio kraštinės 3, 4 ir 5, — statusis, nes $5^2=3^2+4^2$. Trikampiai, kurių kraštinės 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24 25, irgi statieji (paaiškinkite, kodėl). Statieji trikampiai, kurių kraštinių ilgiai išreiš-

kiami sveikaisiais skaičiais, vadinami *pitagòriškaisiais trìkampiais*. Galima įrodyti, kad tokių trikampių statiniai a, b ir įžambinė c išreiškiami formulėmis $a=2m\cdot n$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$; čia m ir n — bet kurie natūralieji skaičiai (žinoma, $m>n$). Trikampis, kurio kraštinės 3, 4, 5, dažnai vadinamas *egiptiẽtiškuoju trìkampiu*, nes jį žinojo jau senovės egiptiečiai. Norėdami gauti statųjį kampą, egiptiečiai darydavo šitaip. Virvutėje darydavo atžymas, dalijančias ją į 12 lygių dalių. Virvutės galus surišdavo ir žemės paviršiuje smaigais ištempdavo taip, kad susidarytų trikampis, kurio kraštinės 3, 4, 5. Tarp kraštinių, lygių 3 ir 4, susidaro statusis kampas.

Uždaviniai

483. Raskite stačiojo trikampio įžambinę, kai duoti statiniai a ir b: a) $a=6$, $b=8$; b) $a=5$, $b=6$; c) $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{4}{7}$; c) $a=8$, $b=8\sqrt{3}$.

484. Stačiojo trikampio kraštinės pažymėtos šitaip: a ir b — statiniai, c — įžambinė. Raskite b, kai: a) $a=12$, $c=13$; b) $a=7$, $c=9$; c) $a=12$, $c=2b$; d) $a=2\sqrt{3}$, $c=2b$; e) $a=3b$, $c=2\sqrt{10}$.

485. Raskite stačiojo trikampio statinį, esantį prieš 60° kampą, kai įžambinė lygi c.

486. Keturkampis $ABCD$ — stačiakampis. Raskite: a) AD, kai $AB=5$, $AC=13$; b) BC, kai $CD=1{,}5$, $AC=2{,}5$; c) CD, kai $BD=17$, $BC=15$.

487. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 17 cm, o pagrindas — 16 cm. Apskaičiuokite į pagrindą nuleistą aukštinę.

488. Raskite: a) lygiakraščio trikampio aukštinę, kai jo kraštinė lygi 6 cm; b) lygiakraščio trikampio kraštinę, kai jo aukštinė lygi 4 cm.

489. Įrodykite, kad lygiakraščio trikampio ploto formulė šitokia: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; čia a — trikampio kraštinė. Apskaičiuokite lygiakraščio trikampio plotą, kai jo kraštinė lygi: a) 5 cm; b) 1,2 cm; c) $2\sqrt{2}$ dm.

490. Raskite lygiašonio trikampio šoninę kraštinę ir plotą, kai: a) pagrindas lygus 12 cm, o į pagrindą nuleista aukštinė lygi 8 cm; b) pagrindas lygus 18 cm, o kampas, esantis prieš

pagrindą, lygus 120°; c) trikampis statusis ir aukštinė, nuleista į įžambinę, lygi 7 cm.

491. Raskite stačiojo trikampio aukštinę, nuleistą į įžambinę, kai duoti statiniai a ir b: a) $a=5$, $b=12$; b) $a=12$, $b=16$.

492. Raskite trikampio, kurio kraštinės 10 cm, 10 cm ir 12 cm, aukštines.

493. Rombo įstrižainės lygios 10 cm ir 24 cm. Apskaičiuokite rombo kraštinę ir plotą.

494. Rombo kraštinė lygi 10 cm, o viena įstrižainė — 12 cm. Raskite kitą rombo įstrižainę ir plotą.

495. Trapecijos $ABCD$ pagrindai AB ir CD. Apskaičiuokite trapecijos plotą, kai: a) $AB=10$ cm, $BC=DA=13$ cm, $CD=20$ cm; b) $\angle C=\angle D=60°$, $AB=BC=8$ cm; c) $\angle C=\angle D=45°$, $AB=6$ cm, $BC=9\sqrt{2}$ cm.

496. Trikampio ABC aukštinės CD pagrindas D yra kraštinėje AB; $AD=BC$, $AB=3$, $CD=\sqrt{3}$. Raskite AC.

497. Viena lygiagretainio įstrižainė yra jo aukštinė. Lygiagretainio perimetras lygus 50 cm, o gretimų kraštinių skirtumas lygus 1 cm. Raskite minėtą lygiagretainio įstrižainę.

498. Trikampių kraštinės išreiškiamos skaičiais: a) 6, 8, 10; b) 5, 6, 7; c) 9, 12, 15; d) 10, 24, 26; e) 3, 4, 6; f) 11, 9, 13; g) 15, 20, 25. Ar tie trikampiai statieji? Kiekvienu atveju atsakymą pagrįskite.

499. Raskite mažiausią trikampio aukštinę, kai jo kraštinės lygios: a) 24 cm, 25 cm, 7 cm; b) 15 cm, 17 cm, 8 cm.

VI SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Papasakokite, kaip matuojami daugiakampių plotai.
2. Suformuluokite pagrindines daugiakampių plotų savybes.
3. Suformuluokite ir įrodykite stačiakampio ploto teoremą.
4. Suformuluokite ir įrodykite lygiagretainio ploto teoremą.
5. Suformuluokite ir įrodykite trikampio ploto teoremą. Kaip apskaičiuojamas stačiojo trikampio plotas žinant jo statinius?
6. Suformuluokite ir įrodykite dviejų trikampių, turinčių po lygų kampą, plotų santykio teoremą.
7. Suformuluokite ir įrodykite trapecijos ploto teoremą.
8. Suformuluokite ir įrodykite Pitagoro teoremą.

9. Suformuluokite ir įrodykite Pitagoro teoremai atvirkštinę teoremą.

10. Kokie trikampiai vadinami pitagoriškaisiais? Pasakykite pitagoriškųjų trikampių pavyzdžių.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

500. Vieno kvadrato kraštinė yra stačiojo lygiašonio trikampio statinis, o kito — į įžambinę nuleista aukštinė. Įrodykite, kad pirmojo kvadrato plotas dukart didesnis už antrojo.

501. Žemės sklypo plotas lygus 27 ha. To sklypo plotą išreikškite: a) kvadratiniais metrais; b) kvadratiniais kilometrais.

502. Lygiagretainio aukštinės lygios 5 cm ir 4 cm, o perimetras lygus 42 cm. Raskite lygiagretainio plotą.

503. Lygiagretainio plotas lygus 24 cm^2, o jo įstrižainių susikirtimo taškas nuo kraštinių nutolęs 2 cm ir 3 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

504. Lygiagretainio mažesnioji kraštinė lygi 29 cm. Statmuo, nuleistas iš įstrižainių susikirtimo taško į didesniąją kraštinę, ją dalija į 33 cm ir 12 cm atkarpas. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.

505. Nagrinėjami visi trikampiai, kurių viena kraštinė a, o kita — b. Įrodykite, kad didžiausias plotas to trikampio, kurio minėtos kraštinės viena kitai statmenos.

506. Per kvadrato viršūnę reikia nubrėžti dvi tieses, kurios jį padalytų į tris vienodo ploto figūras. Kaip tai padaryti?

507*. Kiekviena vieno trikampio kraštinė didesnė už kiekvieną kito trikampio kraštinę. Ar iš to išplaukia, kad pirmojo trikampio plotas didesnis už antrojo?

508*. Įrodykite, kad atstumų nuo lygiašonio trikampio pagrindo taško iki šoninių kraštinių suma nepriklauso nuo to taško padėties.

509. Įrodykite, kad atstumų nuo lygiakraščio trikampio vidaus taško iki jo kraštinių suma nepriklauso nuo to taško padėties.

510*. Per trikampio ABC kraštinės BC tašką D nubrėžtos tiesės, lygiagrečios kitoms dviem kraštinėms; jos kraštines AB ir AC kerta taškuose E ir F. Įrodykite, kad trikampių CDE ir BDF plotai lygūs.

511. Trapecijos $ABCD$, kurios šoninės kraštinės AB ir CD, įstrižainės susikerta taške O. a) Palyginkite trikampių ABD ir ACD plotus. b) Palyginkite trikampių ABO ir CDO plotus. c) Įrodykite, kad $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

512*. Trapecijos pagrindai lygūs a ir b. Atkarpa, kurios galai yra trapecijos šoninėse kraštinėse, lygiagreti pagrindams ir dalija trapeciją į dvi trapecijas, kurių plotai lygūs. Raskite tos atkarpos ilgį.

513. Rombo įstrižainės lygios 18 cm ir 24 m. Apskaičiuokite rombo perimetrą ir atstumą tarp lygiagrečiųjų kraštinių.

514. Rombo plotas lygus 540 cm^2, o viena jo įstrižainė lygi 4,5 dm. Raskite atstumą nuo rombo įstrižainių susikirtimo taško iki kraštinės.

515. Raskite lygiašonio trikampio plotą, kai: a) šoninė kraštinė lygi 20 cm, o kampas prie pagrindo lygus 30°; b) aukštinė, nuleista į šoninę kraštinę, lygi 6 cm ir su pagrindu sudaro 45° kampą.

516. Trikampio ABC kraštinė BC lygi 34 cm. Statmuo MN, nuleistas iš BC vidurio į tiesę AC, kraštinę AC dalija į atkarpas $AN = 25$ cm ir $NC = 15$ cm. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą.

517. Raskite keturkampio $ABCD$ plotą, kai $AB = 5$ cm, $BC = 13$ cm, $CD = 9$ cm, $DA = 15$ cm, $AC = 12$ cm.

518. Raskite lygiašonės trapecijos plotą, kai: a) jos mažesnysis pagrindas lygus 18 cm, aukštinė — 9 cm ir smailusis kampas lygus 45°; b) jos pagrindai lygūs 16 cm ir 30 cm, o įstrižainės viena kitai statmenos.

519. Lygiašonės trapecijos aukštinė lygi h, o jos įstrižainės viena kitai statmenos. Raskite trapecijos plotą.

520. Lygiašonės trapecijos įstrižainės viena kitai statmenos, o jos pagrindų suma lygi $2a$. Raskite trapecijos plotą.

521. Įrodykite: jei keturkampio $ABCD$ įstrižainės viena kitai statmenos, tai $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

522. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 17$ cm, $BC = 5$ cm ir šoninė kraštinė $AB = 10$ cm. Per viršūnę B nubrėžta tiesė, dalijanti pusiau įstrižainę AC. Pagrindą AD ji kerta taške M. Apskaičiuokite trikampio BDM plotą.

523. Du kvadratai turi bendrą viršūnę, o vieno jų kraštinė yra kito įstrižainėje. Kiekvieno kvadrato kraštinė lygi a. Raskite tų kvadratų bendrosios dalies plotą.

524. Lygiagretainio pagrindas lygus 11,735 m, o aukštinė mažesnė už pagrindą 3,485 m. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą šitokiu tikslumu: a) iki 0,001 m²; b) iki 0,01 m²; c) iki 0,1 m².

525. Trikampio ABC $AB=6{,}52$ cm, $AC=4{,}47$ cm, o trikampio $A_1B_1C_1$ $A_1B_1=5{,}27$ cm, $A_1C_1=2{,}12$ cm; $\angle A=\angle A_1$. Raskite trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ plotų santykį 0,01 tikslumu.

526. Trapecijos pagrindai lygūs 1,17 dm ir 3,58 dm, o aukštinė lygi 2,33 dm. Apskaičiuokite trapecijos plotą 0,01 dm² tikslumu.

527. Stačiakampio plotas lygus 17,635 cm², o viena jo kraštinė lygi 5,28 cm. Raskite gretimą kraštinę: a) 0,01 cm tikslumu; b) 0,1 cm tikslumu.

528. Dvi trikampio kraštinės lygios 5,62 m ir 7,19 m, o į pirmąją kraštinę nuleista aukštinė lygi 4,35 m. Raskite į antrą kraštinę nuleistą aukštinę 1 cm tikslumu.

529*. Stačiakampio kraštinės a ir b išmatuotos 0,1 cm tikslumu. Ar galima stačiakampio plotą S apskaičiuoti 1 cm² tikslumu, kai matuojant gauta: a) $a=2{,}5$ cm, $b=1{,}7$ cm; b) $a=$ $=3{,}2$ cm, $b=2{,}5$ cm; c) $a=5{,}6$ cm, $b=7{,}2$ cm?

530. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 7,25 cm ir 3,67 cm. Raskite įžambinę 0,01 cm tikslumu.

531. Stačiojo trikampio įžambinė lygi 11,2 dm, o vienas statinis tris kartus mažesnis už įžambinę. Raskite kitą statinį: a) 1 cm tikslumu; b) 0,1 cm tikslumu.

523*. Stačiojo trikampio statiniai a ir b išmatuoti 0,1 cm tikslumu ir gauti šitokie rezultatai: $a\approx3{,}5$ cm, $b\approx4{,}8$ cm. Ar, panaudojant tuos matavimo rezultatus, įžambinę c galima apskaičiuoti: a) 0,1 cm tikslumu; b) 0,2 cm tikslumu?



VII skyrius

PANAŠIEJI TRIKAMPIAI

§ 1. PANAŠIŲJŲ TRIKAMPIŲ APIBRĖŽIMAS

56. Proporcìngosios ãtkarpos. *Atkarpų̃ AB ir CD sántykiu* vadinamas jų ilgių santykis, t. y. $\frac{AB}{CD}$. Sakoma, kad *ãtkarpos AB ir CD proporcìngos* atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1, jei $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$. Pavyzdžiui, atkarpos AB ir CD, kurių ilgiai lygūs 2 cm ir 1 cm, proporcingos atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1, kurių ilgiai lygūs 3 cm ir 1,5 cm, nes

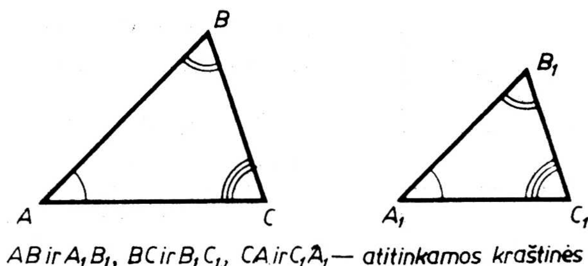
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{2}{3}.$$

Atkarpų proporcingumo sąvoka apibrėžiama ir didesniam atkarpų skaičiui. Pavyzdžiui, trys atkarpos AB, CD ir EF proporcingos trims atkarpoms A_1B_1, C_1D_1 ir E_1F_1, jei

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{EF}{E_1F_1}.$$

57. Panašių̃jų trìkampių apibrėžìmas. Kasdieniniame gyvenime pasitaiko vienodos formos, bet skirtingų matmenų daiktų. Pavyzdžiui, futbolo ir teniso kamuoliai, apskrita lėkštė ir didelis apskritas dubuo. Geometrijoje vienodos formos figūros vadinamos panašiomis. Pavyzdžiui, bet kurie du kvadratai panašūs, bet kurie du skrituliai panašūs. Apibrėšime panašiuosius trikampius.

Sakykime, dviejų trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ kampai atitinkamai lygūs: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. Tokiu atveju kraštinės AB ir A_1B_1, BC ir B_1C_1, CA ir C_1A_1 vadinsime *atitiñkamomis* (188 pav.).



188 pav.

Apibrėžimas. *Du trikampiai, kurių kampai atitinkamai lygūs ir vieno trikampio kraštinės proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms, vadinami panašiais.*

Kitais žodžiais, du trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs, jei juos galima raidėmis pažymėti taip, kad

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1, \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k. \qquad (2)$$

Skaičius k, lygus trikampių atitinkamų kraštinių santykiui, vadinamas *panašumo koeficientu.*

Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ panašumas žymimas šitaip: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. 188 paveiksle pavaizduoti panašieji trikampiai.

Trikampių panašumu galima įsitikinti patikrinus tik tam tikras iš (1) ir (2) lygybių. Kitame paragrafe išnagrinėsime tris trikampių panašumo požymius.

58. Panašiųjų trikampių plotų santykis

Teorema. ***Dviejų panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.***

Įrodymas. Sakykime, trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs, panašumo koeficientas lygus k. Tų trikampių plotus pažymėkime raidėmis S ir S_1. Kadangi $\angle A = \angle A_1$, tai $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (remiantis trikampių, turinčių po lygų kampą, plotų santykio teorema; 52 skyrelis). Iš (2) formulių turime: $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$, todėl $\frac{S}{S_1} = k^2$. Teorema įrodyta.

Klausimai ir uždaviniai

533. Raskite atkarpų AB ir CD santykį, kai jų ilgiai lygūs 15 cm ir 20 cm. Ar tas santykis pasikeis atkarpų ilgius išreiškus milimetrais?

534. Ar proporcingos 189 paveiksle pavaizduotos atkarpos: a) AC, CD ir M_1M_2, MM_1; b) AB, BC, CD ir MM_2, MM_1, M_1M_2; c) AB, BD ir MM_1, M_1M_2?

535. Įrodykite, kad trikampio kampo pusiaukampinė prieš jį esančią kraštinę dalija į atkarpas, proporcingas prie jo esančioms trikampio kraštinėms.

Sprendimas. Sakykime, AD — trikampio ABC pusiaukampinė. Įrodysime, kad $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$ (190 pav.).

Trikampiai ABD ir ACD turi bendrą aukštinę AH, todėl $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}$. Antra vertus, tie trikampiai turi po lygų kampą ($\angle 1=\angle 2$), todėl

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AD}=\frac{AB}{AC}.$$

Iš dviejų plotų santykio išraiškų gauname

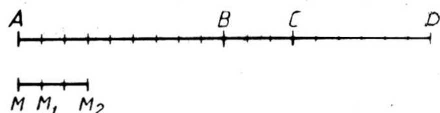
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}, \text{ arba } \frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC},$$

o tai reikėjo įrodyti.

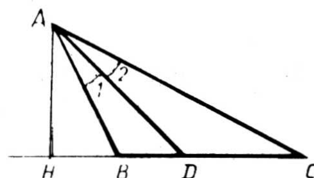
536. Atkarpa BD yra trikampio ABC pusiaukampinė. a) Raskite AB, kai $BC=9$ cm, $AD=7{,}5$ cm, $DC=4{,}5$ cm. b) Raskite DC, kai $AB=30$, $AD=20$, $BD=16$ ir $\angle BDC=\angle C$.

537. Atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė. Apskaičiuokite BD ir DC, kai $AB=14$ cm, $BC=20$ cm, $AC=21$ cm.

538. Trikampio ABC pusiaukampinė AD kraštinę BC dalija į atkarpas CD ir BD, lygias 4,5 cm ir 13,5 cm. Trikampio ABC perimetras lygus 42 cm. Raskite AB ir AC.



189 pav.



190 pav.

539. Į trikampį MNK įbrėžtas rombas $MDEF$, kurio viršūnės D, E ir F yra kraštinėse MN, NK ir MK; $MN=7$ cm, $NK=6$ cm, $MK=5$ cm. Apskaičiuokite atkarpas NE ir EK.

540. Trikampio CDE perimetras lygus 55 cm. Į tą trikampį įbrėžtas rombas $DMFN$, kurio viršūnės M, F ir N yra kraštinėse CD, CE ir DE; $CF=8$ cm, $EF=12$ cm. Raskite kraštines CD ir DE.

541. Ar panašūs trikampiai ABC ir DEF, kai $\angle A=106°$, $\angle B=34°$, $\angle E=106°$, $\angle F=40°$, $AC=4{,}4$ cm, $AB=5{,}2$ cm, $BC=7{,}6$ cm, $DE=15{,}6$ cm, $DF=22{,}8$ cm, $EF=13{,}2$ cm?

542. Panašiųjų trikampių ABC ir KMN atitinkamos kraštinės yra AB ir KM, BC ir MN; $AB=4$ cm, $BC=5$ cm, $CA=7$ cm, $\frac{KM}{AB}=2{,}1$. Raskite trikampio KMN kraštines.

543. Įrodykite, kad panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių santykis lygus į tas kraštines nuleistų aukštinių santykiui.

544. Dviejų panašiųjų trikampių plotai lygūs 75 m² ir 300 m². Antrojo trikampio viena kraštinė lygi 9 m. Raskite ją atitinkančią pirmojo trikampio kraštinę.

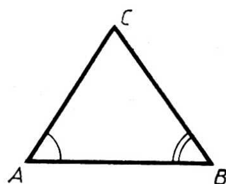
545. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs, jų atitinkamų kraštinių santykis yra 6 : 5. Trikampio ABC plotas 77 cm² didesnis už trikampio $A_1B_1C_1$ plotą. Apskaičiuokite trikampių plotus.

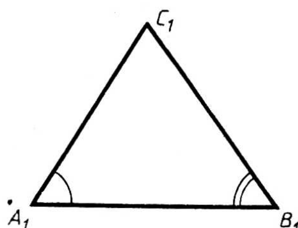
546. Žemės sklypo planas yra trikampio formos. Plano trikampio plotas lygus 87,5 cm², plano mastelis 1 : 100 000. Apskaičiuokite žemės sklypo plotą.

547. Įrodykite, kad dviejų panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.

548. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs. Atitinkamos kraštinės BC ir B_1C_1 lygios 1,4 m ir 56 cm. Raskite trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ perimetrų santykį.

549. Trikampio kraštinės lygios 15 cm, 20 cm ir 30 cm. Į jį panašaus trikampio perimetras lygus 26 cm. Raskite jo kraštines.





191 pav.

§ 2. TRIKAMPIŲ PANAŠUMO POŽYMIAI

59. Pirmasis trikampių panašumo požymis

Teorema. ***Jei vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams, tai tie trikampiai panašūs.***

Įrodymas. Sakykime, ABC ir $A_1B_1C_1$ — du trikampiai, kurių $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ (191 pav.). Įrodysime, kad $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$.

Remiantis trikampio kampų sumos teorema, $\angle C=180°-\angle A-\angle B$, $\angle C_1=180°-\angle A_1-\angle B_1$, todėl $\angle C=\angle C_1$. Taigi trikampio ABC kampai atitinkamai lygūs trikampio $A_1B_1C_1$ kampams.

Įrodysime, kad trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ atitnkamos kraštinės proporcingos. Kadangi $\angle A=\angle A_1$ ir $\angle C=\angle C_1$, tai

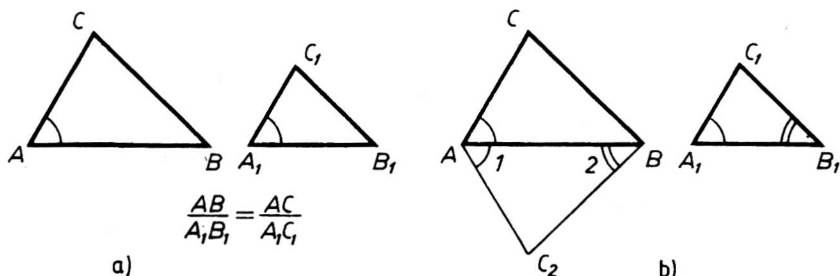
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}\text{ ir }\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{CA\cdot CB}{C_1A_1\cdot C_1B_1}$$

(žr. 52 skyrelį). Iš tų lygybių išplaukia $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$. Panaudoję lygybes $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ taip pat gautume $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$. Taigi trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ atitinkamos kraštinės proporcingos. Teorema įrodyta.

60. Antrasis trikampių panašumo požymis

Teorema. ***Jei vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių lygūs, tai tie trikampiai panašūs.***

Įrodymas. Išnagrinėkime du trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A=\angle A_1$ (192 pav., *a*). Įrodysime, kad $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$. Prisiminus, pirmąjį trikampių panašumo požymį pakanka įrodyti, kad $\angle B=\angle B_1$.



192 pav.

Išnagrinėkime trikampį ABC_2, kurio $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (192 pav., *b*). Remiantis pirmuoju trikampių panašumo požymiu, trikampiai ABC_2 ir $A_1B_1C_1$ panašūs, todėl $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$. Antra vertus, remiantis sąlyga, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Iš tų dviejų lygybių gauname $AC = AC_2$. Trikampiai ABC ir ABC_2 lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų (AB — bendra kraštinė, $AC = AC_2$ ir $\angle A = \angle 1$, nes $\angle A = \angle A_1$ ir $\angle 1 = \angle A_1$). Iš to išplaukia, kad $\angle B = \angle 2$. Kadangi $\angle 2 = \angle B_1$, tai $\angle B = \angle B_1$. Teorema įrodyta.

61. Trečiasis trikampių panašumo požymis

T e o r e m a. ***Jei vieno trikampio visos trys kraštinės proporcingos kito trikampio kraštinėms, tai tie trikampiai panašūs.***

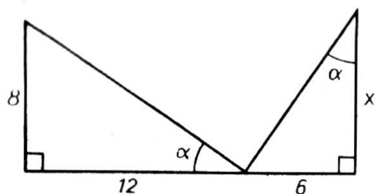
Į r o d y m a s. Sakykime, trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ kraštinės proporcingos:

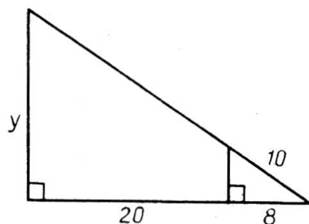
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}. \quad (1)$$

Įrodysime, kad $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Prisiminus antrąjį trikampių panašumo požymį pakanka įrodyti, kad $\angle A = \angle A_1$. Išnagrinėkime trikampį ABC_2, kurio $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (192 pav., *b*). Remiantis antruoju trikampių panašumo požymiu, trikampiai ABC_2 ir $A_1B_1C_1$ panašūs, todėl

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}.$$

Šias lygybes palyginę su (1) lygybėmis gauname: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$. Trikampiai ABC ir ABC_2 lygūs pagal tris kraštines. Iš to išplaukia, kad $\angle A = \angle 1$. Kadangi $\angle 1 = \angle A_1$, tai $\angle A = \angle A_1$. Teorema įrodyta.





193 pav.

Klausimai ir uždaviniai

550. Pagal 193 paveikslo duomenis raskite x ir y.

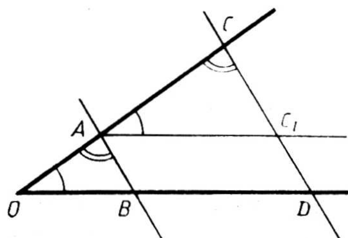
551. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje CD pažymėtas taškas E. Tiesės AE ir BC susikerta taške F. Raskite: a) EF ir FC, kai $DE=8$ cm, $EC=4$ cm, $BC=7$ cm, $AE=10$ cm; b) DE ir EC, kai $AB=8$ cm, $AD=5$ cm, $CF=2$ cm.

552. Trapecijos $ABCD$, kurios pagrindai AB ir CD, įstrižainės susikerta taške O. Raskite: a) AB, kai $OB=4$ cm, $OD=10$ cm, $DC=25$ cm; b) $\frac{AO}{OC}$ ir $\frac{BO}{OD}$, kai $AB=a$, $DC=b$; c) AO, kai $AB=9{,}6$ dm, $DC=24$ cm, $AC=15$ cm.

553. Ar panašūs lygiašoniai trikampiai, turintys:
a) po lygų smailųjį kampą; b) po lygų bukąjį kampą; c) po statųjį kampą? Atsakymą pagrįskite.

554. Trapecijos pagrindai lygūs 5 cm ir 8 cm. Šoninės kraštinės, lygios 3,6 cm ir 3,9 cm, pratęstos, kol susikirs taške M. Raskite atstumus nuo taško M iki mažesniojo pagrindo galų.

555. Taškai M, N ir P yra trikampio ABC kraštinėse AB, BC ir CA; $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Raskite keturkampio $AMNP$ kraštines, kai: a) $AB=10$ cm, $AC=15$ cm, $PN:MN=2:3$; b) $AM=AP$, $AB=a$, $AC=b$.



194 pav.

556. Kampo O kraštinės perkirstos lygiagrečiomis tiesėmis AB ir CD. Įrodykite, kad atkarpos OA ir AC proporcingos atkarpoms OB ir BD (194 pav.).

S p r e n d i m a s. Per tašką A nubrėžkime tiesę AC_1, lygiagrečią tiesei BD (C_1 — tos tie-

sės ir tiesės CD susikirtimo taškas). Tada, remiantis pirmuoju trikampių panašumo požymiu, $\triangle AOB \sim \triangle ACC_1$ ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$), todėl $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$. Kadangi $AC_1 = BD$ (paaiškinkite, kodėl), tai $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, ką ir reikėjo įrodyti.

557. Kampo A kraštinės perkirstos lygiagrečiomis tiesėmis BC ir DE; taškai B ir D yra vienoje kampo kraštinėje, C ir E — kitoje. Raskite: a) AC, kai $CE = 10$ cm, $AD = 22$ cm, $BD = 8$ cm; b) BD ir DE, kai $AB = 10$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 4$ cm, $CE = 4$ cm; c) BC, kai $AB : BD = 2 : 1$ ir $DE = 12$ cm.

558. Tiesės a ir b perkirstos lygiagrečiomis tiesėmis AA_1, BB_1, CC_1; taškai A, B ir C yra tiesėje a, o A_1, B_1 ir C_1 — tiesėje b. Įrodykite, kad $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

559. Vienoje kampo A kraštinėje atidėtos atkarpos $AB = 5$ cm ir $AC = 16$ cm. Kitoje to kampo kraštinėje atidėtos atkarpos $AD = 8$ cm ir $AF = 10$ cm. Ar panašūs trikampiai ACD ir AFB? Atsakymą pagrįskite.

560. Ar panašūs trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių: a) $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 7$ cm, $A_1B_1 = 4{,}5$ cm, $B_1C_1 = 7{,}5$ cm, $C_1A_1 = 10{,}5$ cm; b) $AB = 1{,}7$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 4{,}2$ cm, $A_1B_1 = 34$ dm, $B_1C_1 = 60$ dm, $C_1A_1 = 84$ dm?

561. Įrodykite, kad du lygiakraščiai trikampiai panašūs.

562. Trikampio ABC kraštinė AB lygi a, o aukštinė CH lygi h. Į trikampį įbrėžtas kvadratas, kurio dvi gretimos viršūnės yra kraštinėje AB, o kitos dvi — kraštinėse AC ir BC. Raskite kvadrato kraštinę.

563. Per trikampio ABC pusiaukraštinės AD tašką M ir viršūnę B nubrėžta tiesė, kuri kraštinę AC kerta taške K. Raskite santykį $\frac{AK}{KC}$, kai: a) M — atkarpos AD vidurys; b) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

§ 3. PANAŠUMO TAIKYMAS ĮRODANT TEOREMAS IR SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

62. Trikampio vidurinė linija. *Trikampio vidurinė linija* vadinama atkarpa, jungianti jo dviejų kraštinių vidurio taškus. Įrodysime trikampio vidurinės linijos teoremą.

Teorema. ***Trikampio vidurinė linija lygiagreti vienai jo kraštinei ir lygi pusei tos kraštinės.***

Įrodymas. Sakykime, MN — trikampio ABC vidurinė linija (195 pav.). Įrodysime, kad $MN \parallel AC$ ir $MN = \frac{1}{2} AC$.

Trikampiai BMN ir BAC panašūs (remiantis antruoju trikampių panašumo požymiu; $\angle B$ — bendras, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), todėl $\angle 1 = \angle 2$ ir $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Iš lygybės $\angle 1 = \angle 2$ išplaukia, kad $MN \parallel AC$ (paaiškinkite, kodėl), o iš antrosios lygybės randame $MN = \frac{1}{2} AC$. Teorema įrodyta.

Taikydami įrodytą teoremą, išspręsime šį uždavinį.

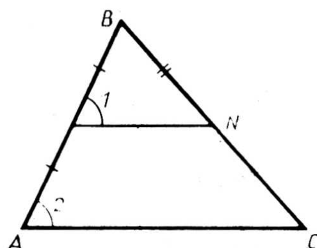
1 uždavinys. *Reikia įrodyti, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, kuris kiekvieną jų dalija santykiu 2 : 1, pradedant nuo viršūnės.*

Sprendimas. Išnagrinėkime bet kokį trikampį ABC. Raide O pažymėkime jo pusiaukraštinių AA_1 ir BB_1 susikirtimo tašką ir nubrėžkime trikampio vidurinę liniją A_1B_1 (196 pav.). Atkarpa A_1B_1 lygiagreti kraštinei AB, todėl $\angle 1 = \angle 2$ ir $\angle 3 = \angle 4$. Vadinasi, trikampiai AOB ir A_1OB_1 panašūs (pagal du kampus), taigi jų kraštinės proporcingos:

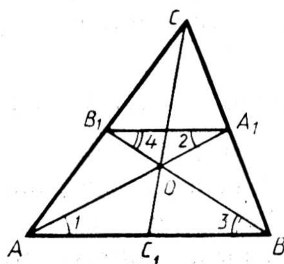
$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Tačiau $AB = 2A_1B_1$, todėl $AO = 2A_1O$ ir $BO = 2B_1O$. Taigi pusiaukraštinių AA_1 ir BB_1 susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija santykiu 2 : 1, pradedant nuo viršūnės.

Šitaip įrodoma, kad pusiaukraštinių BB_1 ir CC_1 susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija santykiu 2 : 1, pradedant nuo viršūnės, taigi sutampa su tašku O. Taigi visos trys trikampio ABC pu-

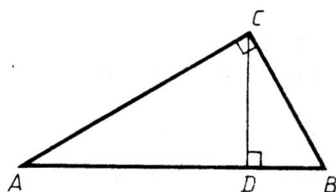


195 pav.



196 pav.

siaukraštinės susikerta taške O, kuris kiekvieną jų dalija santykiu 2 : 1, pradedant nuo viršūnės.



197 pav.

63. Stačiojo trikampio proporcingosios atkarpos

2 uždavinys. *Reikia įrodyti, kad stačiojo trikampio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, trikampį dalija į du panašius stačiuosius trikampius, kurių kiekvienas panašus į pradinį trikampį.*

Sprendimas. Sakykime, ABC — statusis trikampis, $\angle C$ — statusis kampas, CD — aukštinė, nuleista iš viršūnės C į įžambinę AB (197 pav.). Įrodysime, kad

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD,\ \triangle ABC \sim \triangle CBD,\ \triangle ACD \sim \triangle CBD.$$

Trikampiai ABC ir ACD panašūs (pagal pirmąjį trikampių panašumo požymį: $\angle A$ — bendras, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$). Dėl panašių priežasčių trikampiai ABC ir CBD panašūs ($\angle B$ — bendras ir $\angle ACB = \angle CDB = 90°$). Iš čia $\angle A = \angle BCD$. Trikampiai ACD ir CBD panašūs irgi remiantis pirmuoju trikampių panašumo požymiu (tų trikampių kampai, kurių viršūnė D,— statieji ir $\angle A = \angle BCD$). Tai ir reikėjo įrodyti.

Atkarpa XY vadinama atkarpų AB ir CD *geomètriniu vidurkiù* (arba vidurinè proporcingąja), jei $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$.

Remdamiesi 2 uždaviniu įrodysime šiuos teiginius.

1°. *Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, yra atkarpų, į kurias ta aukštinė dalija įžambinę, geometrinis vidurkis.*

Įsitikinsime, $\triangle ADC \sim \triangle CBD$ (žr. 197 pav.), todėl $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$. Vadinasi, $CD^2 = AD \cdot DB$. Iš čia $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.

2°. *Stačiojo trikampio statinis yra įžambinės ir jos atkarpos, esančios tarp statinio ir į įžambinę nuleistos aukštinės, geometrinis vidurkis.*

Įsitikinsime. $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (žr. 197 pav.), todėl $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$. Iš čia $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

64. Trikampių panašumo praktiški taikymai

a) Brėžimo uždaviniai

Sprendžiant daugelį trikampių braižymo uždavinių taikomas vadinamasis *panašùmo metòdas*. Jo esmė tokia: pirmiausia, re-

miantis tam tikrais duomenimis, braižomas trikampis, panašus į ieškomąjį, po to, panaudojant kitus duomenis, braižomas ieškomasis trikampis.

Išnagrinėsime pavyzdį.

3 uždavinys. *Reikia nubraižyti trikampį, kai duoti du kampai ir iš trečiojo kampo viršūnės nubrėžta pusiaukampinė.*

Sprendimas. 198 paveiksle, *a*, pavaizduoti du duoti kampai ir duota atkarpa. Reikia nubraižyti trikampį, kurio du kampai lygūs duotiems kampams, o pusiaukampinė, nubrėžta iš trečiojo kampo viršūnės, lygi duotai atkarpai.

Iš pradžių nubraižykime kokį nors trikampį, panašų į ieškomą trikampį. Tam nubrėžkime bet kokią atkarpą A_1B_1 ir trikampį A_1B_1C, kurio kampai A_1 ir B_1 lygūs duotiems kampams (198 pav., *b*).

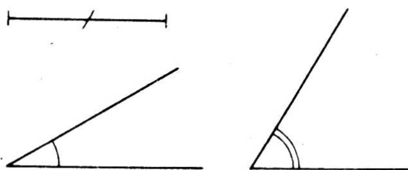
Po to braižome kampo C pusiaukampinę ir joje atidedame atkarpą CD, lygią duotai atkarpai. Per tašką D brėžiame tiesę, lygiagrečią A_1B_1. Ji kampo C kraštines kerta tam tikruose taškuose A ir B (198 pav., *b*). Trikampis ABC ieškomasis.

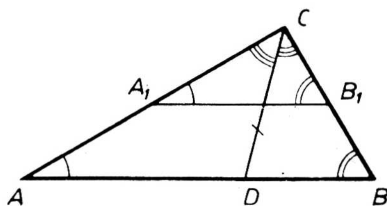
Įsitikinsime. Kadangi $AB \| A_1B_1$, tai $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, vadinasi, trikampio ABC du kampai lygūs duotiems kampams. Remiantis brėžimu, trikampio ABC pusiaukampinė CD lygi duotai atkarpai. Taigi trikampis ABC tenkina visas uždavinio sąlygas.

Aišku, kad uždavinys turi sprendinį, kai dviejų duotų kampų suma mažesnė už 180°. Kadangi atkarpą A_1B_1 galima pasirinkti laisvai, tai yra be galo daug trikampių, tenkinančių uždavinio sąlygas. Visi tie trikampiai lygūs (paaiškinkite, kodėl), todėl uždavinys turi vienintelį sprendinį.

b) Matavimas vietovėje

Panašiųjų trikampių savybėmis galima pasinaudoti matuojant vietovėje. Išnagrinėsime du uždavinius: daikto aukščio ir atstumo iki neprieinamo taško radimas.





198 pav. a) b)

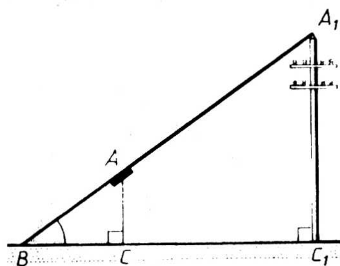
Daikto aukščio radimas. Sakykime, reikia rasti kokio nors daikto, pavyzdžiui, 199 paveiksle pavaizduoto telefono stulpo A_1C_1, aukštį. Tam kokiu nors atstumu nuo stulpo pastatykime kartį AC su prie jos pritvirtinta lentele, kurią galima pasukti. Lentelę nukreipkime į stulpo viršutinį galą A_1, kaip parodyta paveiksle. Žemės paviršiuje pažymėkime tašką B, kuriame žemės paviršių kirstų tiesė A_1A. Statieji trikampiai A_1C_1B ir ACB panašūs (pagal pirmąjį trikampių panašumo požymį: $\angle C_1 = \angle C = 90°$, $\angle B$ — bendras). Iš trikampių panašumo išplaukia

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}, \text{ o iš čia } A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC}.$$

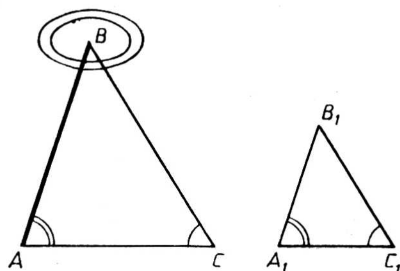
Išmatavę atstumus BC_1 bei BC ir žinodami karties ilgį AC, pagal gautą formulę randame telefono stulpo aukštį A_1C_1. Pavyzdžiui, jei $BC_1 = 6{,}3$ m, $BC = 2{,}1$ m, $AC = 1{,}7$ m, tai $A_1C_1 = \frac{1{,}7 \cdot 6{,}3}{2{,}1} = 5{,}1$ m.

Atstumo iki neprieinamo taško radimas. Sakykime, reikia rasti atstumą nuo taško A iki neprieinamo taško B (200 pav.). Tam vietovėje pasirenkame tašką C, nugairiuojame atkarpą AC ir ją išmatuojame. Po to su astroliabija išmatuojame kampus A ir C. Popieriaus lape braižome trikampį $A_1B_1C_1$, kurio $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$. Išmatuojame to trikampio kraštines A_1B_1 ir A_1C_1. Kadangi $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, tai $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Iš čia $AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}$. Žinodami atstumus AC, A_1C_1 ir A_1B_1, randame atstumą AB.

Kad būtų paprasčiau apskaičiuoti, patogu braižyti trikampį $A_1B_1C_1$, kurio $A_1C_1 : AC = 1 : 1000$. Pavyzdžiui, jei $AC = 130$ m, tai atstumą A_1C_1 pasirinkime 130 mm. Tada $AB = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot A_1B_1 =$



199 pav.



200 pav.

$=1000 \cdot A_1B_1$. Taigi atstumą A_1B_1 išmatavę milimetrais, iš karto gausime atstumą AB metrais.

P a v y z d y s. Sakykime, $AC = 130$ m, $\angle A = 73°$, $\angle C = 58°$ (žr. 200 pav.). Popieriuje braižome trikampį $A_1B_1C_1$, kurio $\angle A_1 = 73°$, $\angle C_1 = 58°$, $A_1C_1 = 130$ mm ir išmatuojame atkarpą A_1B_1. Ji lygi 153 mm, todėl ieškomasis atstumas lygus 153 m.

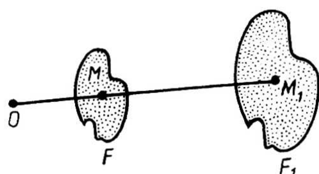
65. Bet kokių figūrų panašumas. Galima apibrėžti ne tik trikampių, bet ir kitokių figūrų panašumą. Figūros F ir F_1 vadinamos *panašiõsiomis,* jei kiekvienam figūros F taškui galima priskirti figūros F_1 tašką ir $\frac{M_1N_1}{MN} = k$; čia M ir N — bet kurie du figūros F taškai, M_1 ir N_1 — juos atitinkantys figūros F_1 taškai, k — visų taškų atveju tas pats teigiamas skaičius. Čia laikoma, kad kiekvienas figūros F_1 taškas atitinka kurį nors figūros F tašką. Skaičius k vadinamas figūrų F ir F_1 *panašùmo koeficientù.*

Panašiųjų figūrų taškų atitiktis žinoma iš kasdienės praktikos. Pavyzdžiui, kino juostą projektuojant į ekraną, kiekvieną kino kadro vaizdo tašką atitinka tam tikras ekrano taškas, o visi atstumai padidinami tą patį skaičių kartų.

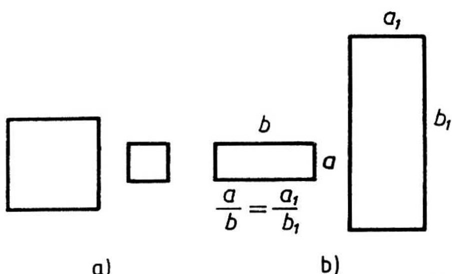
201 paveiksle parodytas figūros F_1, panašios į duotą figūrą F, braižymo būdas. Figūros F tašką M atitinkantis plokštumos taškas M_1 randamas šitaip: taškai M ir M_1 yra spindulyje, kurio pradžia — fiksuotas taškas O, ir $OM_1 = k \cdot OM$ (201 paveiksle $k = 3$). Taip gaunama figūra F_1, panaši į figūrą F. Tokiu atveju figūros F ir F_1 vadinamos *ceñtriškai panašiomìs.*

Galima įrodyti, kad bendrasis panašiųjų figūrų apibrėžimas, taikomas trikampiams, ekvivalentus 57 skyrelyje pateiktam trikampių panašumo apibrėžimui.

Pateiksime panašiųjų keturkampių pavyzdžių. Bet kurie du kvadratai panašūs (202 pav., *a*). Du stačiakampiai, kurių vieno dvi gretimos kraštinės proporcingos kito stačiakampio dviem greti-



201 pav.



202 pav.

moms kraštinėms, panašūs (202 pav., *b*). Panašiosios figūros yra, pavyzdžiui, du skirtingų mastelių tos pačios vietovės geografiniai žemėlapiai, dvi nevienodo didumo to paties daikto fotografijos.

Klausimai ir uždaviniai

564. Trikampio kraštinės lygios 8 cm, 5 cm, 7 cm. Raskite trikampio, kurio viršūnės yra duoto trikampio kraštinių vidurio taškai, perimetrą.

565. Atstumas nuo stačiakampio įstrižainių susikirtimo taško iki tiesės, kurioje yra jo didesnioji kraštinė, lygus 2,5 cm. Raskite mažesniąją stačiakampio kraštinę.

566. P ir Q — trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Trikampio APQ perimetras lygus 21 cm. Raskite trikampio ABC perimetrą.

567. Įrodykite, kad bet kokio keturkampio kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

568. Įrodykite, kad keturkampis yra rombas, kai jo viršūnės yra: a) stačiakampio kraštinių vidurio taškai; b) lygiašonės trapecijos kraštinių vidurio taškai.

569. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus, lygiagreti pagrindams ir lygi pusei pagrindų skirtumo.

570. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainė AC lygi 18 cm. Kraštinės AB vidurys M sujungtas su viršūne D. Raskite atkarpas, į kurias atkarpa DM dalija įstrižainę AC.

571. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 susikerta taške O. Trikampio ABO plotas lygus S. Raskite trikampio ABC plotą.

572—574 uždavinių sąlygose stačiojo trikampio ABC, kurio kampas C — status, o CH — aukštinė, elementai pažymėti šitaip: $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $CH=h$, $AH=b_c$, $HB=a_c$.

572. Raskite: a) h, a ir b, kai $b_c=25$, $a_c=16$; b) h, a ir b, kai $b_c=36$, $a_c=64$; c) a, c ir a_c, kai $b=12$, $b_c=6$; d) b, c ir b_c, kai $a=8$, $a_c=4$; e) h, b, a_c ir b_c, kai $a=6$, $c=9$.

573. Atkarpas a_c ir b_c išreikškite atkarpomis a, b ir c.

574. Įrodykite, kad: a) $h=\frac{ab}{c}$; b) $\frac{a^2}{a_c}=\frac{b^2}{b_c}$.

575. Stačiojo trikampio statinių santykis 3:4, o įžambinė lygi 50 mm. Raskite atkarpas, į kurias įžambinę padalija iš stačiojo kampo viršūnės nuleista aukštinė.

576. Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, įžambinę padalija į atkarpas, kurių viena 11 cm ilgesnė už kitą. Trikampio statinių santykis 6:5. Raskite įžambinę.

577. Trikampio kraštinės lygios 5 cm, 12 cm ir 13 cm. Į didžiausią kraštinę nuleista aukštinė. Raskite atkarpas, į kurias aukštinė dalija tą kraštinę.

578. Remdamiesi 63 skyrelio 2^0 teiginiu, įrodykite Pitagoro teoremą: stačiojo trikampio ABC, kurio kampas C — status, $AC^2+BC^2=AB^2$.

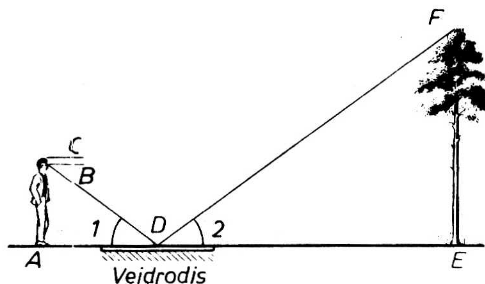
S p r e n d i m a s. Sakykime, CD — trikampio ABC aukštinė (žr. 197 pav.). Remiantis 63 skyrelio 2^0 teiginiu, $AC=$ $=\sqrt{AD\cdot AB}$, arba $AC^2=AD\cdot AB$. Panašiai $BC^2=BD\cdot AB$. Tas lygybes panariui sudėję ir prisiminę, kad $AD+BD=AB$, gauname

$$AC^2+BC^2=AD\cdot AB+BD\cdot AB=(AD+BD)AB=AB^2.$$

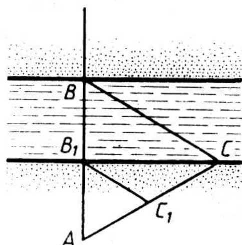
579. 199 paveiksle pavaizduoto stulpo A_1C_1 aukščiui rasti panaudota kartis su lentele. Apskaičiuokite stulpo aukštį, kai $BC_1=$ $=6{,}3$ m, $BC=3{,}4$ m, $AC=1{,}7$ m.

580. Medžio šešėlio ilgis lygus 10,2 m, o žmogaus, kurio ūgis 1,7 m, šešėlio ilgis lygus 2,5 m. Raskite medžio aukštį.

581. Medžio aukštį galima rasti panaudojant veidrodį. Tai parodyta 203 paveiksle. Šviesos spindulys FD, atsispindėjęs nuo veidrodžio taško D, patenka į žmogaus akį (tašką B). Ap-



203 pav.



204 pav.

skaičiuokite medžio aukštį, kai $AC=165$ cm, $BC=12$ cm, $AD=120$ cm, $DE=4{,}8$ m, $\angle 1=\angle 2$.

582. Vietovėje atstumui nuo taško A iki neprieinamo taško B rasti pasirenkamas taškas C, išmatuojama atkarpa AC bei kampai BAC ir ACB. Po to popieriaus lape nubraižomas trikampis $A_1B_1C_1$, panašus į trikampį ABC. Raskite AB, kai $AC=42$ cm, $A_1C_1=6{,}3$ cm, $A_1B_1=7{,}2$ cm.

583. 204 paveiksle parodyta, kaip, remiantis trikampių ABC ir AB_1C_1 panašumu, galima apskaičiuoti upės plotį BB_1. Raskite BB_1, kai $AC=100$ m, $AC_1=32$ m, $AB_1=34$ m.

Brėžimo uždaviniai

584. Atkarpą AB padalykite į atkarpas AX ir XB, proporcingas duotoms atkarpoms P_1Q_1 ir P_2Q_2.

S p r e n d i m a s. Nubrėžkime kurį nors spindulį AM, nesantį tiesėje AB, jame nuosekliai atidėkime atkarpas AC ir CD, lygias atkarpoms P_1Q_1 ir P_2Q_2 (205 pav.). Po to nubrėžkime tiesę BD ir tiesę, einančią per tašką C ir lygiagrečią tiesei BD. Ji atkarpą AB kirs ieškomame taške X (žr. 556 uždavinį).

585. Nubrėžkite atkarpą AB ir ją padalykite santykiu: a) 2:5; b) 3:7; c) 4:3.

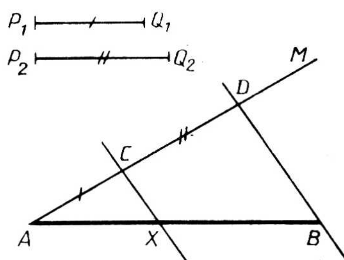
586. Nubraižykite trikampį, kai duoti du kampai ir iš mažesniojo tų kampų viršūnės nubrėžta pusiaukampinė.

587. Nubraižykite trikampį, kai duoti du kampai ir iš trečio kampo viršūnės nuleista aukštinė.

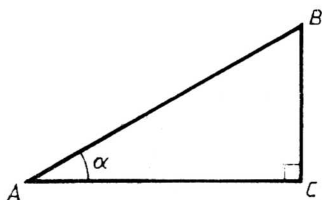
588. Nubraižykite trikampį ABC, kai duotas kampas A, pusiaukraštinė AM ir žinoma, kad $AB:AC=2:3$.

589. Nubraižykite trikampį ABC, kai duotas kampas A, kraštinė BC ir žinoma, kad $AB:AC=2:1$.

590. Nubraižykite statųjį trikampį, kai duota įžambinė ir statinių santykis.



205 pav.



206 pav.

§ 4. STAČIOJO TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ RYŠIAI

66.* Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas. Išnagrinėkime statųjį trikampį ABC, kurio kampas C — status (206 pav.). To trikampio statinis BC yra prieš kampą A, o statinis AC — prie kampo A.

Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu vadinamas prieš tą kampą esančio statinio ir įžambinės santykis.

Stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusu vadinamas prie to kampo esančio statinio ir įžambinės santykis.

Stačiojo trikampio smailiojo kampo tangentu vadinamas prieš tą kampą esančio statinio ir prie to kampo esančio statinio santykis.

Kampo α sinusas, kosinusas ir tangentas žymimi ženklais $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ (skaitoma: „sinus alfa“, „kosinus alfa“ ir „tangens alfa“). Pagal 206 paveikslą

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \tag{1}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}. \tag{3}$$

Iš (1) ir (2) formulių gauname: $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}$.
Palyginę su (3) formule randame:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \tag{4}$$

t. y. *kampo tangentas lygus to kampo sinuso ir kosinuso santykiui.*

Įrodysime: *jei vieno stačiojo trikampio smailusis kampas lygus kito stačiojo trikampio smailiajam kampui, tai tų kampų sinusai lygūs, tų kampų kosinusai lygūs, tų kampų tangentai lygūs.* Sakykime, ABC ir $A_1B_1C_1$ — statieji trikampiai, jų kampai C ir C_1 — statieji, o smailieji kampai A ir A_1 lygūs. Remiantis pirmuoju trikampių panašumo požymiu, trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs, todėl $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Iš šių lygybių išplau-

kia $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, t. y. $\sin A = \sin A_1$. Panašiai $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, t. y. $\cos A = \cos A_1$, ir $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, t. y. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Dabar įrodysime, kad

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \quad (5)$$

Iš (1) ir (2) formulių gauname

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

Remiantis Pitagoro teorema, $BC^2 + AC^2 = AB^2$, todėl $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

(5) lygybė vadinama *pagrindinė trigonomètrijos*[1] *tapatýbe.*

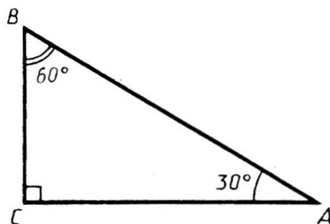
67. 30°, 45° ir 60° kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės. Pirmiausia rasime 30° ir 60° kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes. Tam išnagrinėkime statųjį trikampį ABC, kurio kampas C — statusis, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ (207 pav.). Kadangi statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės, tai $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Tačiau $\frac{BC}{AB} = \sin A = \sin 30°$. Antra vertus, $\frac{BC}{AB} = \cos B = \cos 60°$. Taigi $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Iš pagrindinės trigonometrijos tapatybės gauname:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

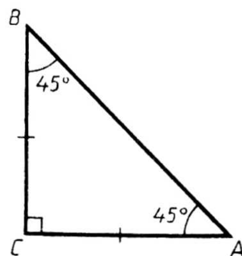
$$\sin 60° = \sqrt{1 - \cos^2 60°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pagal (4) formulę randame:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$



207 pav.



208 pav.

[1] Graikiškas žodis „trigonometrija" reiškia „trikampių matavimą".

Dabar rasime sin 45°, cos 45° ir tg 45°. Tam išnagrinėkime lygiašonį statųjį trikampį ABC, kurio kampas C — statusis (208 pav.). To trikampio $AC=BC$, $\angle A=\angle B=45°$. Remiantis Pitagoro teorema, $AB^2=AC^2+BC^2=2AC^2=2BC^2$. Iš čia $AC=BC=$ $=\frac{AB}{\sqrt{2}}$. Vadinasi, $\sin 45°=\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45°=$ $=\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45°=\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC}=1$.

Sudarysime kampų α, lygių 30°, 45°, 60°, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmių lentelę.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Uždaviniai

591. Trikampio ABC kampas C — statusis. Raskite kampų A ir B sinusą, kosinusą ir tangentą, kai: a) $BC=8$, $AB=17$; b) $BC=21$, $AC=20$; c) $BC=1$, $AC=2$; d) $AC=24$, $AB=25$.

592. Nubraižykite kampą α, kai: a) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; b) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$;

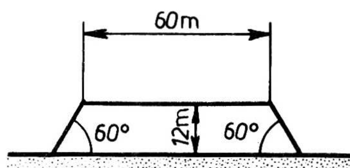
c) $\cos\alpha=0{,}2$; d) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; e) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$;

f) $\sin\alpha=0{,}4$.

°593. Raskite: a) $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; b) $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; c) $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

594. Stačiojo trikampio vienas statinis lygus b, o prieš jį esantis kampas lygus β. a) Kitą statinį, prieš jį esantį kampą ir įžambinę išreikškite duotais b ir β. b) Apskaičiuokite jų reikšmes, kai $b=10$ cm, $\beta=50°$.

595. Stačiojo trikampio vienas statinis lygus b, prie jo esantis kampas lygus α. a) Duotais b ir α išreikškite kitą statinį, prie jo esantį smailųjį kampą ir įžambinę. b) Apskaičiuokite jų reikšmes, kai $b=12$ cm, $\alpha=42°$.



209 pav.

596. Stačiojo trikampio įžambinė lygi c, vienas smailusis kampas lygus α. Duotais c ir α išreikškite kitą smailųjį kampą ir statinius. Apskaičiuokite jų reikšmes, kai $c=24$ cm, $\alpha=35°$.

597. Stačiojo trikampio statiniai lygūs a ir b. Statiniais a ir b išreikškite įžambinę ir smailiuosius kampus. Raskite jų reikšmes, kai $a=12$, $b=15$.

598. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α. Raskite trikampio plotą, kai: a) šoninė kraštinė lygi b; b) pagrindas lygus a.

599. Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 2 cm ir 6 cm, o kampas prie didesniojo pagrindo lygus α. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

600. Plento pylimo viršutinės dalies plotis 60 m. Šlaitai į horizontą pasvirę 60° kampu, pylimo aukštis lygus 12 m (209 pav.). Apskaičiuokite pylimo apatinės dalies plotį.

601. Rombo įstrižainės lygios $2\sqrt{3}$ ir 2. Raskite rombo kampus.

602. Stačiakampio kraštinės lygios 3 cm ir $\sqrt{3}$ cm. Raskite kampus, kuriuos stačiakampio įstrižainė sudaro su jo kraštinėmis.

603. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinė AD lygi 12 cm, o kampas BAD lygus 47°50′; įstrižainė BD statmena kraštinei AB. Raskite lygiagretainio plotą.

VII SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Ką vadiname dviejų atkarpų santykiu?
2. Kokiu atveju sakoma, kad atkarpos AB ir CD proporcingos atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1?
3. Pasakykite panašiųjų trikampių apibrėžimą.
4. Suformuluokite ir įrodykite panašiųjų trikampių plotų santykio teoremą.

5. Suformuluokite ir įrodykite pirmąjį trikampių panašumo požymį.
6. Suformuluokite ir įrodykite antrąjį trikampių panašumo požymį.
7. Suformuluokite ir įrodykite trečiąjį trikampių panašumo požymį.
8. Kokia atkarpa vadinama trikampio vidurine linija? Suformuluokite ir įrodykite trikampio vidurinės linijos teoremą.
9. Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, kuris kiekvieną pusiaukraštinę dalija santykiu 2 : 1, pradedant nuo viršūnės.
10. Suformuluokite ir įrodykite stačiojo trikampio dalijimo (iš stačiojo kampo viršūnės nuleista aukštinė) į du panašius trikampius teiginį.
11. Suformuluokite ir įrodykite stačiojo trikampio proporcingųjų atkarpų teiginį.
12. Pateikite brėžimo uždavinio sprendimo panašumo metodu pavyzdį.
13. Papasakokite, kaip vietovėje galima rasti daikto aukštį ir atstumą iki neprieinamo taško.
14. Paaiškinkite, kokios dvi figūros vadinamos panašiomis. Kas yra figūrų panašumo koeficientas?
15. Ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu, kosinusu, tangentu?
16. Įrodykite: jei vieno stačiojo trikampio smailusis kampas lygus kito stačiojo trikampio smailiajam kampui, tai tų kampų sinusai lygus, tų kampų kosinusai lygus ir tų kampų tangentai lygus.
17. Kokia lygybė vadinama pagrindine trigonometrijos tapatybe?
18. Kokios yra 30°, 45°, 60° kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės? Paaiškinkite, kaip tos reikšmės randamos.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

604. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs. $AB=6$ cm, $BC=9$ cm, $CA=10$ cm. Trikampio $A_1B_1C_1$ didžiausioji kraštinė lygi 7,5 cm. Raskite kitas dvi trikampio $A_1B_1C_1$ kraštines.

605. Trapecijos $ABCD$ įstrižainė AC trapeciją padalija į du panašiuosius trikampius. Įrodykite, kad $AC^2=a \cdot b$; čia a ir b — trapecijos pagrindai.

606. Trikampio MNP pusiaukampinės MD ir NK susikerta taške O; $MN=5$ cm, $NP=3$ cm, $MP=7$ cm. Raskite santykį $OK:ON$.

607. Lygiašonio trikampio pagrindo ir šoninės kraštinės santykis 4 : 3, o aukštinė, nuleista į pagrindą, lygi 30 cm. Raskite atkarpas, į kurias tą aukštinę dalija kampo prie pagrindo pusiaukampinė.

608. Lygiašonio trikampio AOB, kurio pagrindas AB, šoninės kraštinės OB tęsinyje pažymėtas taškas C; taškas B yra tarp taškų O ir C. Atkarpa AC kampo AOB pusiaukampinę kerta taške M. Įrodykite, kad $AM<MC$.

609. Trikampio ABC kraštinėje BC pažymėtas taškas D; $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$. Įrodykite, kad AD — trikampio ABC pusiaukampinė.

610. Tiesė, lygiagreti trikampio ABC kraštinei AB, kraštinę AC dalija santykiu 2 : 7, pradedant nuo viršūnės A; $AB=10$ cm, $BC=18$ cm, $CA=21{,}6$ cm. Raskite atkirstojo trikampio kraštines.

611. Įrodykite, kad trikampio ABC pusiaukraštinė AM dalija pusiau kiekvieną atkarpą, kurios galai yra kraštinėse AB ir AC ir kuri lygiagreti kraštinei BC.

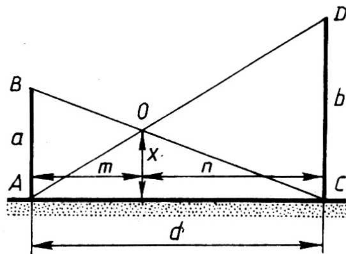
612. Smaigai AB ir CD, kurių ilgiai a ir b skirtingi, įbesti vertikaliai tam tikru atstumu vienas nuo kito, kaip parodyta 210 paveiksle. Galai A ir D, B ir C sujungti virvutėmis, kurios susikerta taške O. Panaudodami paveikslo duomenis įrodykite, kad: a) $\frac{m}{d}=\frac{x}{b}$ ir $\frac{n}{d}=\frac{x}{a}$; b) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$. Raskite x ir įrodykite, kad x nepriklauso nuo atstumo d tarp smaigų AB ir CD.

613. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs, kai:

a) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BM}{B_1M_1}$; čia BM ir B_1M_1 — trikampių pusiaukraštinės;

b) $\angle A=\angle A_1$ $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BH}{B_1H_1}$; čia BH ir B_1H_1 — trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ aukštinės.

614. Stačiosios trapecijos $ABCD$, kurios kampas A — statusis, įstrižainės viena kitai statmenos.



210 pav.

Pagrindas AB lygus 6 cm, šoninė kraštinė AD lygi 4 cm. Raskite DC, DB ir CB.

615*. Atkarpa, kurios galai yra trapecijos šoninėse kraštinėse, lygiagreti jos pagrindams ir eina per įstrižainių susikirtimo tašką. Raskite tos atkarpos ilgį, kai trapecijos pagrindai lygūs a ir b.

616. Įrodykite, kad trikampio viršūnės vienodai nutolusios nuo tiesės, kurioje yra jo vidurinė linija.

617. Įrodykite, kad rombo kraštinių vidurio taškai yra stačiakampio viršūnės.

618. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinių CD ir BC vidurio taškai yra M ir N. Įrodykite, kad tiesės AM ir AN įstrižainę BD dalija į tris lygias dalis.

619. Trikampio ABC priekampio, kurio viršūnė A, pusiaukampinė tiesę BC kerta taške D. Įrodykite, kad $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$.

620. Per trikampio ABC ($AB \neq AC$) kraštinės BC vidurį nubrėžta tiesė, lygiagreti kampo A pusiaukampinei, kuri tieses AB ir AC kerta taškuose D ir E. Įrodykite, kad $BD=CE$.

621. Trapecijos $ABCD$ pagrindų AD ir BC suma lygi b, įstrižainė AC lygi a, $\angle ACB=\alpha$. Raskite trapecijos plotą.

622. Duotas trikampis ABC. Nubraižykite trikampį $A_1B_1C_1$, kurio plotas būtų du kartus didesnis už trikampio ABC plotą.

623. Duotos trys atkarpos, kurių ilgiai lygūs a, b ir c. Nubrėžkite atkarpą, kurios ilgis lygus $\frac{ab}{c}$.

624. Nubraižykite trikampį, kai duoti jo kraštinių vidurio taškai.

625. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė ir į kitas dvi kraštines nubrėžtos pusiaukraštinės.

Su skaičiuotuvu spręstini uždaviniai

626—630 uždavinių sąlygose stačiojo trikampio ABC, kurio kampas C — statusis, o CH — aukštinė, elementai pažymėti šitaip: $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $CH=h$, $AH=b_c$, $HB=a_c$.

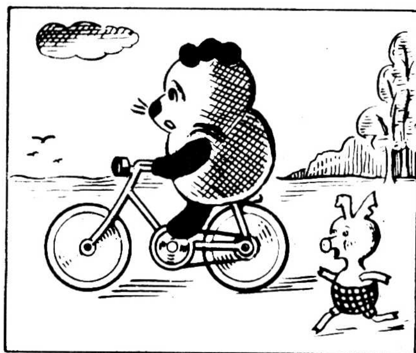
626. Apskaičiuokite h, a ir b 0,01 cm tikslumu, kai: a) $a_c=5{,}23$ cm, $b_c=7{,}35$ cm; b) $a_c=1{,}19$ cm, $c=3{,}52$ cm; c) $b_c=17{,}92$ cm, $c=25{,}34$ cm.

627. Apskaičiuokite b ir c 1 cm tikslumu, kai: a) $a=3{,}27$ m, $h=2{,}11$ m; b) $a=8{,}74$ m, $a_c=5{,}42$ m; c) $h=1{,}25$ m, $a_c=$ $=2{,}82$ m.

628. Raskite trikampių ABC ir ACH plotų santykį 0,01 tikslumu, kai $a=21{,}3$ dm, $b=37{,}8$ dm.

629*. Yra žinoma, kad $\frac{a}{b}=2{,}3$ ir $h=10$ cm. Raskite a, b ir c 0,1 cm tikslumu.

630*. Raskite santykius $\frac{a}{b}$ ir $\frac{a}{c}$ 0,01 tikslumu, kai $\frac{S_{ACH}}{S_{BCH}}=0{,}85$.



VIII skyrius

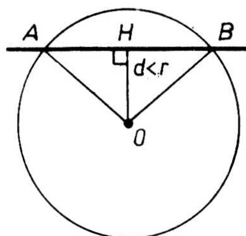
APSKRITIMAS

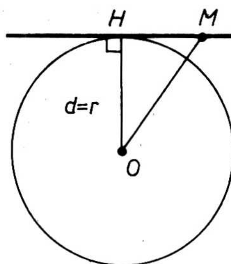
§ 1. APSKRITIMO LIESTINĖ

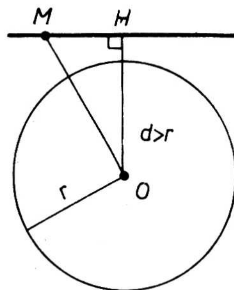
68. Tiesės ir apskritimo tarpusavio padėtis. Išsiaiškinsime, kiek bendrų taškų gali turėti tiesė ir apskritimas, atsižvelgiant į jų tarpusavio padėtį. Aišku, kad tiesė, einanti per apskritimo centrą, kerta apskritimą dviejuose taškuose, kurie yra toje tiesėje esančio skersmens galai.

Sakykime, tiesė p neina per apskritimo, kurio centras O ir spindulys r, centrą. Nuleiskime statmenį OH į tiesę p. Raide d pažymėkime to statmens ilgį, t. y. atstumą nuo apskritimo centro iki tiesės (211 pav.). Išnagrinėsime tiesės ir apskritimo tarpusavio padėtį, atsižvelgdami į d ir r ryšį. Galimi trys atvejai.

1) $d<r$. Tiesėje p nuo taško H atidėkime dvi atkarpas HA ir HB, kurių ilgiai lygūs $\sqrt{r^2-d^2}$ (211 pav., a). Remiantis Pitagoro teorema, $OA=\sqrt{OH^2+HA^2}=\sqrt{d^2+(r^2-d^2)}=r$, $OB=\sqrt{OH^2+HB^2}=\sqrt{d^2+(r^2-d^2)}=r$. Vadinasi, A ir B yra apskritimo taškai, taigi jie yra tiesės p ir nagrinėjamo apskritimo bendri taškai.







211 pav. a) b) c)

Įrodysime, kad tiesė p ir nagrinėjamas apskritimas kitų bendrų taškų neturi. Tarkime, kad jie turi dar vieną bendrą tašką C. Tada lygiašonio trikampio OAC pusiaukraštinė OD, nubrėžta į pagrindą AC, yra to trikampio aukštinė, todėl $OD \perp p$. Atkarpos OD ir OH nesutampa, nes atkarpos AC vidurys D nesutampa su tašku H — atkarpos AB viduriu. Gavome, kad iš taško O nuleisti du statmenys — OH ir OD — į tiesę p, o tai negalima. Taigi *jei atstumas nuo apskritimo centro iki tiesės mažesnis už apskritimo spindulį* ($d<r$), *tai tiesė ir apskritimas turi du bendrus taškus.* Tokiu atveju tiesė vadinama apskritimo *kirstinė.*

2) $d=r$. Šiuo atveju $OH=r$, t. y. H yra apskritimo taškas, vadinasi, yra tiesės ir apskritimo bendras taškas (211 pav., b). Tiesė p ir apskritimas neturi kitų bendrų taškų, nes, kad ir koks būtų tiesės p taškas M, nesutampantis su tašku H, $OM>OH=r$ (pasviroji OM didesnė už statmenį OH), todėl M nėra apskritimo taškas. Taigi *jei atstumas nuo apskritimo centro iki tiesės lygus apskritimo spinduliui, tai tiesė ir apskritimas turi tik vieną bendrą tašką.*

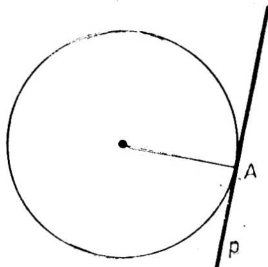
3) $d>r$. Šiuo atveju $OH>r$, todėl, kad ir koks būtų tiesės p taškas M, $OM \geqslant OH>r$ (211 pav., c). Vadinasi, M nėra apskritimo taškas. Taigi *jei atstumas nuo apskritimo centro didesnis už apskritimo spindulį, tai tiesė ir apskritimas neturi bendrų taškų.*

69. Apskritimo liestinė. Įrodėme, kad tiesė ir apskritimas gali turėti vieną arba du bendrus taškus, gali neturėti nė vieno bendro taško. *Tiesė, kuri su apskritimu turi tik vieną bendrą tašką, vadinama apskritimo liestinė, o jų bendras taškas vadinamas tiesės ir apskritimo lietimosi tašku.* 212 paveiksle tiesė p — apskritimo, kurio centras O, liestinė, A — lietimosi taškas.

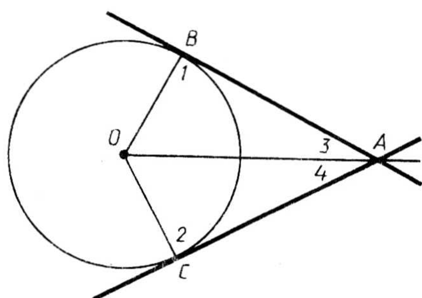
Įrodysime liestinės savybės teoremą.

Teorema. ***Apskritimo liestinė statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką.***

Įrodymas. Sakykime, p — apskritimo, kurio centras O, liestinė, A — lietimosi taškas (žr. 212 pav.). Įrodysime, kad liestinė p statmena spinduliui OA.



212 pav.



213 pav.

Tarkime, kad taip nėra. Tada spindulys OA yra pasviroji į tiesę p. Kadangi statmuo, nuleistas iš taško O į tiesę p, mažesnis už pasvirąją OA, tai atstumas nuo apskritimo centro O iki tiesės p mažesnis už spindulį. Vadinasi, tiesė p ir apskritimas turi du bendrus taškus. Tačiau tai prieštarauja sąlygai: juk tiesė p — liestinė. Taigi tiesė p statmena spinduliui OA. Teorema įrodyta.

Išnagrinėsime dvi apskritimo, kurio centras O, liestines, einančias per tašką A ir liečiančias apskritimą taškuose B ir C (213 pav.). Atkarpas AB ir AC vadinsime *liestinių, einančių iš taško A, atkarpomis*. Iš įrodytos teoremos išplaukia šitokia jų savybė.

Apskritimo liestinių, einančių iš vieno taško, atkarpos lygios ir su tiese, einančia per tą tašką ir apskritimo centrą, sudaro lygius kampus.

Norėdami šį teiginį įrodyti, grįžkime prie 213 paveikslo. Remiantis liestinės savybės teorema, kampai *1* ir *2* — statieji, todėl trikampiai ABO ir ACO — statieji. Jie lygūs, nes turi bendrą įžambinę, statiniai OB ir OC lygūs. Vadinasi, $AB=AC$ ir $\angle 3=$ $=\angle 4$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Dabar įrodysime liestinės savybės teoremai atvirkštinę teoremą (liestinės požymį).

Teorema. ***Jei tiesė eina per apskritimo spindulio galą, priklausantį apskritimui, ir statmena tam spinduliui, tai ji yra apskritimo liestinė.***

Įrodymas. Iš teoremos sąlygos išplaukia, kad minėtas spindulys yra statmuo, nubrėžtas iš apskritimo centro į nagrinėjamą tiesę. Todėl atstumas nuo apskritimo centro iki tiesės lygus spinduliui, o tada tiesė ir apskritimas turi tik vieną bendrą tašką. Tai ir reiškia, kad tiesė yra apskritimo liestinė. Teorema įrodyta.

Šia teorema grindžiami apskritimo liestinių brėžimo uždaviniai. Išspręsime vieną tokių uždavinių.

Uždavinys. *Per duotą apskritimo, kurio centras O, tašką A reikia nubrėžti to apskritimo liestinę.*

S p r e n d i m a s. Nubrėžiame tiesę OA, po to tiesę p, einančią per tašką A ir statmeną tiesei OA. Remiantis liestinės požymiu, tiesė p yra ieškomoji liestinė.

Uždaviniai

631. Sakykime, d — atstumas nuo apskritimo, kurio spindulys r, iki tiesės p. Kokia tiesės p ir apskritimo tarpusavio padėtis, kai: a) $r=16$ cm, $d=12$ cm; b) $r=5$ cm, $d=4,2$ cm; c) $r=7,2$ dm, $d=3,7$ dm; d) $r=8$ cm, $d=1,2$ dm; e) $r=5$ cm, $d=50$ mm?

632. Atstumas nuo taško A iki apskritimo centro mažesnis už apskritimo spindulį. Įrodykite, kad kiekviena tiesė, einanti per tašką A, yra to apskritimo kirstinė.

633. Duotas kvadratas $OABC$, kurio kraštinė lygi 6 cm, ir apskritimas, kurio centras O, o spindulys lygus 5 cm. Kurios iš tiesių OA, AB, BC ir AC yra to apskritimo kirstinės?

634. Apskritimo centras O. Spindulys OM stygą AB dalija pusiau. Įrodykite, kad liestinė, einanti per tašką M, lygiagreti stygai AB.

635. Per apskritimo tašką A nubrėžta liestinė ir styga, lygi apskritimo spinduliui. Raskite kampą tarp jų.

636. Apskritimo styga AB lygi spinduliui. Per jos galus nubrėžtos dvi liestinės, susikertančios taške C. Raskite kampą ACB.

637. Kampas tarp skersmens AB ir stygos AC lygus 30°. Per tašką C nubrėžta liestinė. Ji tiesę AB kerta taške D. Įrodykite, kad trikampis ACD lygiašonis.

638. Tiesė AB taške B liečia apskritimą, kurio centras O ir spindulys r. Raskite AB, kai $OA=2$ cm, $r=1,5$ cm.

639. Tiesė AB taške B liečia apskritimą, kurio centras O ir spindulys r. Raskite AB, kai $\angle AOB=60°$, $r=12$ cm.

640. Apskritimo centras O, spindulys 4,5 cm; $OA=9$ cm. Per tašką A nubrėžtos dvi apskritimo liestinės. Raskite kampą tarp jų.

641. Atkarpos AB ir AC yra apskritimo, kurio centras O, liestinių, išeinančių iš taško A, atkarpos. Atkarpos OA vidurys yra apskritimo taškas. Raskite kampą BAC.

642. 213 paveiksle $OB=3$ cm, $OA=6$ cm. Raskite AB, AC, $\angle 3$ ir $\angle 4$.

643. Tiesės AB ir AC taškuose B ir C liečia apskritimą, kurio centras O. Raskite BC, kai $\angle OAB=30°$, $AB=5$ cm.

644. Tiesės MA ir MB taškuose A ir B liečia apskritimą, kurio centras O. Taškas C simetriškas taškui O taško B atžvilgiu. Įrodykite, kad $\angle AMC=3\angle BMC$.

645. Iš apskritimo skersmens AB galų nuleisti statmenys AA_1 ir BB_1 į liestinę, kuri nestatmena skersmeniui AB. Įrodykite, kad lietimosi taškas yra atkarpos A_1B_1 vidurys.

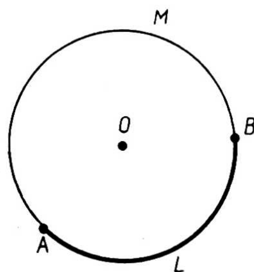
646. Trikampio ABC kampas B — statusis. Įrodykite, kad: a) tiesė BC yra apskritimo, kurio centras A ir spindulys AB, liestinė; b) tiesė AB yra apskritimo, kurio centras C ir spindulys CB, liestinė; c) tiesė AC nėra apskritimų, kurių centras B, o spinduliai BA ir BC, liestinė.

647. Atkarpa AH — statmuo, nuleistas iš taško A į tiesę, einančią per apskritimo centrą O. Apskritimo spindulys lygus 3 cm. Ar tiesė AH yra apskritimo liestinė, kai: a) $OA=5$ cm, $AH=4$ cm; b) $\angle HAO=45°$, $OA=4$ cm; c) $\angle HAO=30°$, $OA=6$ cm?

648. Nubrėžkite apskritimo liestinę: a) lygiagrečią duotai tiesei; b) statmeną duotai tiesei.

§ 2. CENTRINIAI IR ĮBRĖŽTINIAI KAMPAI

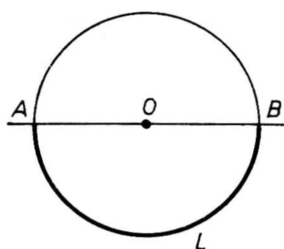
70. Apskritimo lanko laipsninis matas. Pažymėkime du apskritimo taškus: A ir B. Jie apskritimą padalija į du lankus. Kad iš karto būtų aišku, apie kurį lanką kalbame, pažymime po vieną jų tarpinį tašką, pavyzdžiui, L ir M (214 pav.). Lankai žymimi šitaip: $\smile ALB$ ir $\smile AMB$. Kartais nenurodomas tarpinis taškas: $\smile AB$ (kai aišku, apie katrą iš dviejų lankų kalbama).

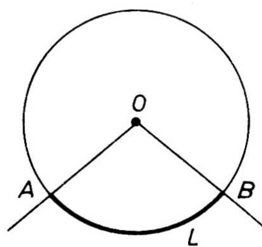


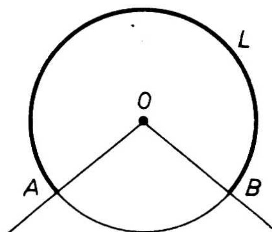
214 pav.

Lankas, kurio galus jungianti atkarpa yra apskritimo skersmuo, vadinamas *pùsapskritimiu*. 215 paveiksle, *a*, pavaizduoti du pusapskritimiai, kurių vienas paryškintas.

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centras, vadinamas jo *centriniù kampù*. Sakykime, apskritimo, kurio centras O, centrinio kampo kraštinės apskritimą kerta taškuose A ir B. Centrinį kampą







215 pav.

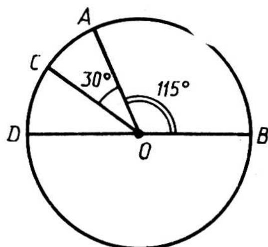
AOB atitinka du lankai, kurių galai *A* ir *B* (žr. 215 pav.). Jei $\angle AOB$ ištiestinis, tai jį atitinka du pusapskritimiai (215 pav., *a*). Jei $\angle AOB$ neištiestinis, tai sakoma, kad lankas *AB*, esantis to kampo viduje, *mažesnis už pusapskritimį*. 215 paveiksle, *b*, tas lankas paryškintas. Kitas lankas, kurio galai *A* ir *B*, laikomas *didesniu už pusapskritimį* (215 paveiksle, *c*, lankas *ALB*).

Apskritimo lanką galima matuoti laipsniais. *Apskritimo, kurio centras O, mažesnio už pusapskritimį lanko AB bei pusapskritimio laipsniniu matu laikomas centrinio kampo AOB laipsninis matas* (žr. 215 pav., *a*, *b*). *Didesnio už pusapskritimį lanko AB laipsniniu matu laikoma* $360° - \angle AOB$ (žr. 215 pav., *c*).

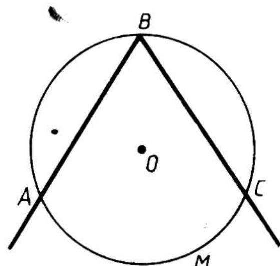
Iš čia išplaukia, kad *apskritimo dviejų lankų, turinčių tuos pačius galus, laipsninių matų suma lygi* 360°.

Lanko *AB* (lanko *ALB*) laipsninį matą, kaip ir patį lanką, žymėsime ženklu $\smile AB$ ($\smile ALB$).

216 paveiksle lanko *CAB* laipsninis matas lygus 145°. Dažnai sakoma trumpai: „Lankas *CAB* lygus 145°", ir rašoma $\smile CAB = 145°$. Tame pačiame paveiksle $\smile ADB = 360° - 115° = 245°$, $\smile CDB = 360° - 145° = 215°$, $\smile DB = 180°$.



216 pav.



217 pav.

71. Įbrėžtinio kampo teorema. *Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės kerta apskritimą, vadinamas įbrėžtiniù kampù.*

217 paveiksle kampas ABC — įbrėžtinis; lankas AMC yra to kampo viduje. Tokiu atveju sakoma, kad įbrėžtinis kampas ABC *remiasi į lanką AMC.* Įrodysime įbrėžtinio kampo teoremą.

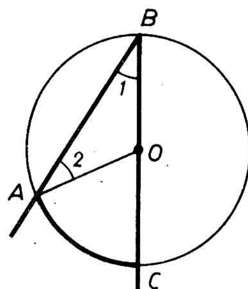
T e o r e m a. ***Įbrėžtinis kampas matuojamas puse lanko, į kurį jis remiasi.***

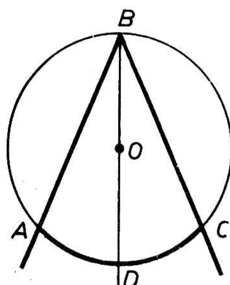
Į r o d y m a s. Sakykime, $\angle ABC$ — apskritimo, kurio centras O, įbrėžtinis kampas, besiremiantis į lanką AC (218 pav.). Įrodysime, kad $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$. Išnagrinėsime spindulio BO padėties kampo ABC atžvilgiu tris galimus atvejus.

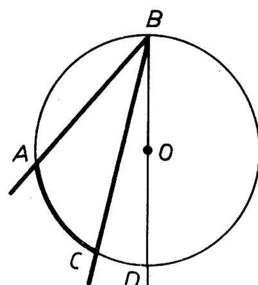
1) *Spindulys BO sutampa su viena kampo ABC kraštine, pavyzdžiui, BC* (218 pav., *a*). Tuo atveju lankas AC mažesnis už pusapskritimį, todėl $\angle AOC = \smile AC$. Kadangi kampas AOC — lygiašonio trikampio ABO priekampis, o kampai *1* ir *2* lygūs kaip lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo, tai $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$. Iš čia išplaukia, kad $2\angle 1 = \smile AC$, arba $\angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC$.

2) *Spindulys BO kampą ABC dalija į du kampus.* Tuo atveju spindulys BO lanką AC kerta tam tikrame taške D (218 pav., *b*). Taškas D lanką AC dalija į du lankus: $\smile AD$ ir $\smile DC$. Remiantis tuo, ką jau įrodėme, $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ ir $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$. Tas lygybes panariui sudėję gauname:

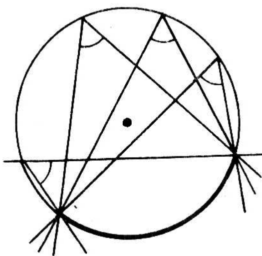
$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC, \text{ arba } \angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$



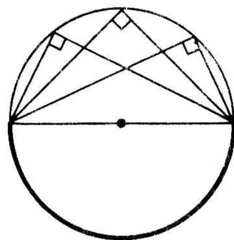




218 pav.



219 pav.



220 pav.

3) *Spindulys BO kampo ABC nedalija į du kampus ir nesutampa nė su viena to kampo kraštine.* Šį atvejį, pasinaudodami 218 paveikslu, *c*, įrodykite savarankiškai.

1 išvada. *Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką, lygūs* (219 pav.).

2 išvada. *Įbrėžtinis kampas, besiremiantis į pusapskritimį,— status* (220 pav.).

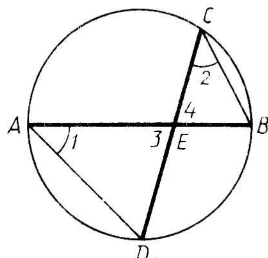
Remdamiesi 1 savybe įrodysime susikertančių stygų atkarpų sandaugos teoremą.

Teorema. ***Jei dvi apskritimo stygos susikerta, tai vienos stygos atkarpų sandauga lygi kitos stygos atkarpų sandaugai.***

Įrodymas. Sakykime, stygos AB ir CD susikerta taške E (221 pav.). Įrodysime, kad

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Išnagrinėkime trikampius ADE ir CBE. Tų trikampių kampai *1* ir *2* lygūs, nes įbrėžtiniai ir remiasi į tą patį lanką BD, o kampai *3* ir *4* lygūs kaip kryžminiai. Remiantis pirmuoju trikampių panašumo požymiu, $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Iš čia išplaukia, kad $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, arba $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Teorema įrodyta.



221 pav.

Uždaviniai

649. Nubrėžkite apskritimą, kurio centras O, pažymėkite jo tašką A. Nubrėžkite stygą AB, kad būtų: a) $\angle AOB = 60°$; b) $\angle AOB = 90°$; c) $\angle AOB = 120°$; d) $AOB = 180°$.

650. Apskritimo centras O, spindulys lygus 16. Raskite stygą AB, kai: a) $\angle AOB=60°$; b) $\angle AOB=90°$; c) $\angle AOB=180°$.

651. Apskritimo, kurio centras O, stygos AB ir CD lygios. a) Įrodykite, kad du lankai, kurių galai A ir B, atitinkamai lygūs dviem lankams, kurių galai C ir D. b) Raskite lankus, kurių galai C ir D, kai $\angle AOB=112°$.

652. Apskritimo spindulys lygus 15 cm, C ir D — pusapskritimio AB taškai, $\smile AC=37°$, $\smile BD=23°$. Raskite stygą CD.

653. Raskite įbrėžtinį kampą ABC, kai lankas AC, į kurį jis remiasi, lygus: a) 48°; b) 57°; c) 90°; d) 124°; e) 180°.

654. Pagal 222 paveikslo duomenis raskite x.

655. Centrinis kampas AOB 30° didesnis už įbrėžtinį kampą, besiremiantį į lanką AB. Raskite kiekvieną tų kampų.

656. Styga AB jungia 115° lanko galus, o styga AC — 43° lanko galus. Raskite kampą BAC.

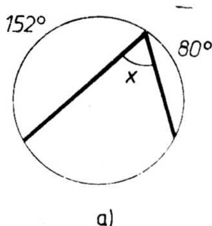
657. Taškai A ir B apskritimą dalija į du lankus, kurių mažesnysis lygus 140°. Taškas M didesnįjį lanką dalija santykiu 6 : 5, pradedant nuo taško A. Raskite kampą BAM.

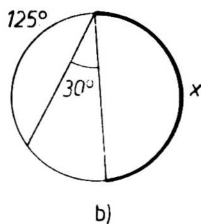
658. Per tašką A nubrėžta apskritimo liestinė AB (B — lietimosi taškas) ir kirstinė AD, einanti per centrą O (D — apskritimo taškas, O yra tarp A ir D). Raskite $\angle BAD$ ir $\angle ADB$, kai $\smile BD=110°20'$.

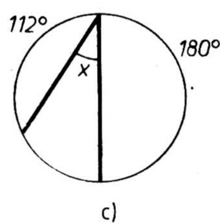
659. Įrodykite, kad apskritimo lankų, esančių tarp lygiagrečių stygų, laipsniniai matai lygūs.

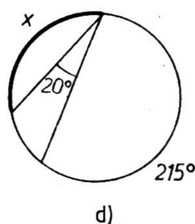
660. Per šalia apskritimo esantį tašką nubrėžtos dvi kirstinės, sudarančios 32° kampą. Tarp to kampo kraštinių esantis didesnysis apskritimo lankas lygus 100°. Raskite mažesnįjį lanką.

661. Per šalia apskritimo esantį tašką nubrėžtos dvi kirstinės, sudarančios smailųjį kampą. Raskite tą kampą, kai tarp kirstinių esantys lankai lygūs 140° ir 52°.









222 pav.

662. Apskritimo stygos AB ir CD susikerta taške E. Raskite kampą BEC, kai $\smile AD=54°$, $\smile BC=70°$.

663. Atkarpa AC — apskritimo skersmuo, AB — styga, MA — liestinė, kampas MAB smailus. Įrodykite, kad $\angle MAB=\angle ACB$.

664. Tiesė AM — apskritimo liestinė, AB — to apskritimo styga. Įrodykite, kad kampas MAB matuojamas puse lanko AB, esančio kampo MAB viduje.

665. Trikampio ABC viršūnės yra apskritimo taškai, AB — apskritimo skersmuo. Įrodykite, kad $\angle C>\angle A$ ir $\angle C>\angle B$.

666. Apskritimo stygos AB ir CD susikerta taške E. Raskite ED, kai: a) $AE=5$, $BE=2$, $CE=2{,}5$; b) $AE=16$, $BE=9$, $CE=ED$; c) $AE=0{,}2$, $BE=0{,}5$, $CE=0{,}4$.

667. Apskritimo skersmuo AA_1 statmenas stygai BB_1 ir kerta ją taške C. Raskite BB_1, kai $AC=4$ cm, $CA_1=8$ cm.

668. Įrodykite, kad statmuo, nuleistas iš apskritimo taško į skersmenį, yra atkarpų, į kurias statmens pagrindas dalija skersmenį, geometrinis vidurkis.

669. Pasinaudodami 668 uždaviniu nubrėžkite dviejų duotų atkarpų geometrinį vidurkį.

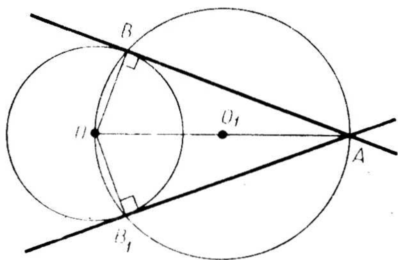
670. Per tašką A nubrėžta apskritimo liestinė AB (B — lietimosi taškas) ir kirstinė, kuri apskritimą kerta taškuose P ir Q. Įrodykite, kad $AB^2=AP\cdot AQ$.

671. Per tašką A nubrėžta apskritimo liestinė AB (B — lietimosi taškas) ir kirstinė, kuri apskritimą kerta taškuose C ir D. Raskite CD, kai: a) $AB=4$ cm, $AC=2$ cm; b) $AB=5$ cm, $AD=10$ cm.

672. Per šalia apskritimo esantį tašką A nubrėžtos dvi kirstinės, kurių viena apskritimą kerta taškuose B_1, C_1, o kita — taškuose B_2, C_2. Įrodykite, kad $AB_1\cdot AC_1=AB_2\cdot AC_2$.

673. Per šalia duoto apskritimo esantį tašką nubrėžkite jo liestinę.

S p r e n d i m a s. Sakykime, duotas apskritimas, kurio centras O, ir šalia jo taškas A. Tarkime, kad uždavinys išspręstas ir AB — ieškomoji liestinė (223 pav.). Kadangi tiesė AB statmena spinduliui OB, tai uždaviniui išspręsti pa-



223 pav.

kanka rasti apskritimo tašką B, kad kampas ABO būtų status. Tą tašką galima rasti šitaip. Brėžiame atkarpą OA ir randame jos vidurį O_1. Po to brėžiame apskritimą, kurio centras O_1, o spindulys O_1A. Tas apskritimas duotą apskritimą kerta dviejuose taškuose: B ir B_1. Tiesės AB ir AB_1 — ieškomos liestinės, nes $AB \perp OB$ ir $AB_1 \perp OB_1$. Įsitikinsime. Kampai ABO ir AB_1O yra apskritimo, kurio centras O_1, įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į pusapskritimį, todėl jie statūs. Aišku, kad uždavinys turi du sprendinius.

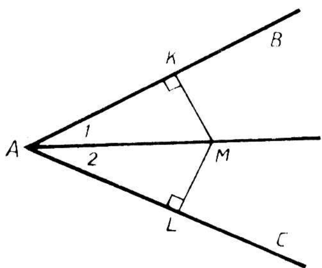
§ 3. KETURI YPATINGI TRIKAMPIO TAŠKAI

72. Kampo pusiaukampinės ir atkarpos vidurio statmens savybės. Įrodysime kampo pusiaukampinės teoremą.

T e o r e m a. ***Kiekvienas neištiestinio kampo pusiaukampinės taškas vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių***[1]. Atvirkščiai: ***kiekvienas kampo vidaus taškas, vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių, yra jo pusiaukampinėje.***

Į r o d y m a s. 1) Pasirinkime bet kurį kampo BAC pusiaukampinės tašką M, nubrėžkime statmenis MK ir ML į tieses AB ir AC (224 pav.). Įrodysime, kad $MK = ML$. Išnagrinėkime stačiuosius trikampius AMK ir AML. Jie lygūs pagal įžambinę ir smailųjį kampą (AM — bendra įžambinė, $\angle 1 = \angle 2$ — duota sąlygoje). Vadinasi, $MK = ML$.

2) Sakykime, taškas M yra kampo BAC viduje ir vienodai nutolęs nuo jo kraštinių AB ir AC. Įrodysime, kad spindulys AM — kampo BAC pusiaukampinė (žr. 224 pav.). Nubrėžkime statmenis MK ir ML į tieses AB ir AC. Statieji trikampiai AKM ir ALM lygūs pagal įžambinę ir statinį (AM — bendra įžambinė, $MK = ML$ — duota sąlygoje). Vadinasi, $\angle 1 = \angle 2$. Tačiau tai ir reiškia, kad spindulys AM — kampo BAC pusiaukampinė. Teorema įrodyta.

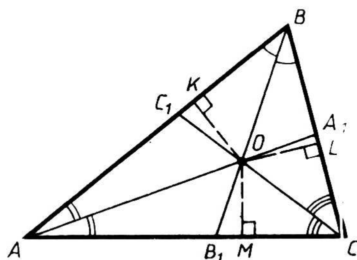


224 pav.

I š v a d a. *Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške.*

[1] T. y. vienodai nutolęs nuo tiesių, kuriose yra kampo kraštinės.

Įsitikinsime. Trikampio ABC pusiaukampinių AA_1 ir BB_1, susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Iš to taško nubrėžkime statmenis OK, OL ir OM į tieses AB, BC ir CA (225 pav.). Remiantis įrodyta teorema, $OK=OM$ ir $OK=OL$. Iš čia $OM=$ $=OL$, t. y. taškas O vienodai nutolęs nuo kampo ACB kraštinių, taigi jis yra to kampo pusiaukampinėje CC_1. Vadinasi, visos trys trikampio ABC pusiaukampinės susikerta taške O. Tai ir reikėjo įrodyti.



225 pav.

Atkarpõs vìdurio stãtmeniu vadinama tiesė, einanti per atkarpos vidurį ir jai statmena.

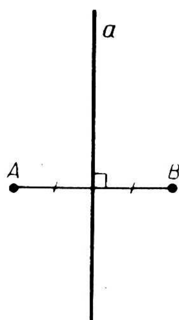
226 paveiksle tiesė a — atkarpos AB vidurio statmuo.

Įrodysime atkarpos vidurio statmens teoremą.

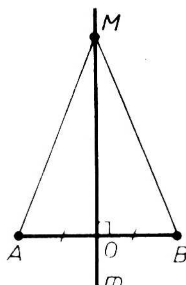
T e o r e m a. ***Atkarpos vidurio statmens kiekvienas taškas vienodai nutolęs nuo tos atkarpos galų.*** Atvirkščiai: ***kiekvienas taškas, vienodai nutolęs nuo atkarpos galų, yra jos vidurio statmenyje.***

Į r o d y m a s. Sakykime, tiesė m — atkarpos AB vidurio statmuo, O — atkarpos vidurys (227 pav., a).

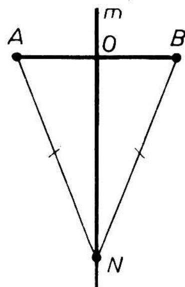
1) Pasirinkime tiesės m bet kurį tašką M. Įrodysime, kad $AM=BM$. Jei taškas M sutampa su tašku O, tai lygybė teisinga, nes O — atkarpos AB vidurys. Sakykime, M ir O — skirtingi taškai. Statieji trikampiai OAM ir OBM lygūs pagal du statinius ($OA=OB$, OM — bendras statinis); todėl $AM=BM$.



226 pav.



a)



b) 227 pav.

2) Išnagrinėkime bet kurį tašką N, vienodai nutolusį nuo atkarpos AB galų. Įrodysime, kad taškas N yra tiesėje m. Jei N — tiesės AB taškas, tai jis sutampa su atkarpos AB viduriu O, todėl yra tiesėje m. Jei taškas N nėra tiesėje AB, tai išnagrinėkime trikampį ANB. Jis lygiašonis, nes $AN=BN$ (227 pav., b). Atkarpa NO — to trikampio pusiaukraštinė, todėl ir aukštinė. Taigi $NO \perp AB$, todėl tiesės ON ir m sutampa, vadinasi, N — tiesės m taškas. Teorema įrodyta.

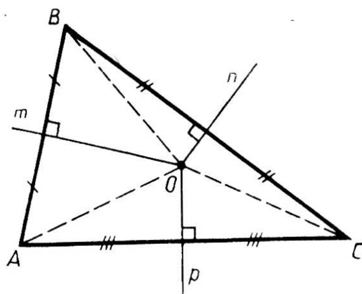
Išvada. *Trikampio kraštinių vidurio statmenys susikerta viename taške.*

Įsitikinsime. Trikampio ABC kraštinių AB ir BC vidurio statmenų m ir n susikirtimo tašką pažymėkime raide O (228 pav.). Remiantis įrodyta teorema, $OB=OA$ ir $OB=OC$. Iš čia $OA=OC$, t. y. taškas O vienodai nutolęs nuo atkarpos AC galų, vadinasi, yra tos atkarpos vidurio statmenyje p. Taigi trikampio ABC visi trys kraštinių vidurio statmenys m, n ir p susikerta taške O.

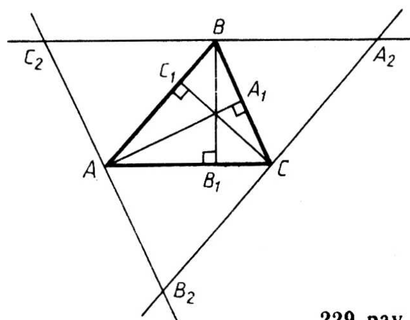
73. Trikampio aukštinių susikirtimo teorema. Įrodėme, kad trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške, kad trikampio kraštinių vidurio statmenys irgi susikerta viename taške. Anksčiau įrodėme, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške (62 skyrelis). Paaiškėja, kad panaši savybė būdinga ir trikampio aukštinėms.

Teorema. ***Trikampio aukštinės (arba jų tęsiniai) susikerta viename taške.***

Įrodymas. Išnagrinėkime bet kokį trikampį ABC. Įrodysime, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1, kuriose yra jo aukštinės, susikerta viename taške (229 pav.). Per kiekvieną trikampio ABC viršūnę nubrėžkime tiesę, lygiagrečią prieš ją esančiai kraštinei. Gausime trikampį $A_2B_2C_2$. Taškai A, B ir C yra to trikampio



228 pav.



229 pav.

kraštinių vidurio taškai. Įsitikinsime. $AB=A_2C$ ir $AB=CB_2$ kaip lygiagretainių ABA_2C ir $ABCB_2$ priešingosios kraštinės, todėl $A_2C=CB_2$. Panašiai $C_2A=AB_2$ ir $C_2B=BA_2$. Be to, remiantis brėžimu, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ ir $BB_1 \perp A_2C_2$. Taigi tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 yra trikampio $A_2B_2C_2$ kraštinių vidurio statmenys. Vadinasi, jos susikerta viename taške. Teorema įrodyta.

Taigi su kiekvienu trikampiu susiję keturi taškai: pusiaukraštinių susikirtimo taškas, pusiaukampinių susikirtimo taškas, kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas ir aukštinių (arba jų tęsinių) susikirtimo taškas. Tie keturi taškai vadinami *ypatingaisiais trikampio taškais*.

Uždaviniai

674. Iš neištiestinio kampo O pusiaukampinės taško M nubrėžti statmenys MA ir MB į to kampo kraštines. Įrodykite, kad $AB \perp OM$.

675. Kampo A kraštinės liečia kiekvieną iš dviejų apskritimų, turinčių bendrą liestinę taške A. Įrodykite, kad tų apskritimų centrai yra tiesėje OA.

676. Apskritimo centras O, spindulys r. Kampo A kraštinės liečia apskritimą. Raskite: a) OA, kai $r=5$ cm, $\angle A=60°$; b) r, kai $OA=14$ dm, $\angle A=90°$.

677. Trikampio ABC priekampių, kurių viršūnės B ir C, pusiaukampinės susikerta taške O. Įrodykite, kad taškas O yra apskritimo, liečiančio tieses AB, BC, AC, centras.

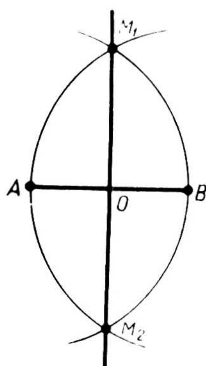
678. Trikampio ABC pusiaukampinės AA_1 ir BB_1 susikerta taške M. Raskite kampus ACM ir BCM, kai: a) $\angle AMB=136°$; b) $\angle AMB=111°$.

679. Trikampio ABC kraštinės BC vidurio statmuo kraštinę AC kerta taške D. Raskite: a) AD ir CD, kai $BD=5$ cm, $AC=$ $=8,5$ cm; b) AC, kai $BD=11,4$ cm, $AD=3,2$ cm.

680. Trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio statmenys susikerta kraštinės BC taške D. Įrodykite, kad: a) D — kraštinės BC vidurys; b) $\angle A=\angle B+\angle C$.

681. Lygiašonio trikampio ABC kraštinės AB vidurio statmuo kraštinę BC kerta taške E. Raskite trikampio pagrindą AC, kai trikampio AEC perimetras lygus 27 cm, o $AB=18$ cm.

682. Lygiašoniai trikampiai ABC ir ABD turi bendrą pagrindą AB. Įrodykite, kad tiesė CD eina per atkarpos AB vidurį.



230 pav.

683. Įrodykite: jei trikampio ABC kraštinės AB ir AC nelygios, tai trikampio pusiaukraštinė AM nėra aukštinė.

684. Lygiašonio trikampio ABC kampų prie pagrindo AB pusiaukampinės susikerta taške M. Įrodykite, kad tiesė CM statmena tiesei AB.

685. Lygiašonio trikampio ABC aukštinės AA_1 ir BB_1, nuleistos į šonines kraštines, susikerta taške M. Įrodykite, kad tiesė MC — atkarpos AB vidurio statmuo.

686. Nubrėžkite duotos atkarpos vidurio statmenį.

Sprendimas. Sakykime, AB — duota atkarpa. Nubrėžkime du apskritimus, kurių centrai A ir B, o spindulys AB (230 pav.). Tie apskritimai susikerta dviejuose taškuose: M_1 ir M_2. Atkarpos AM_1, AM_2, BM_1, BM_2 lygios kaip tų apskritimų spinduliai.

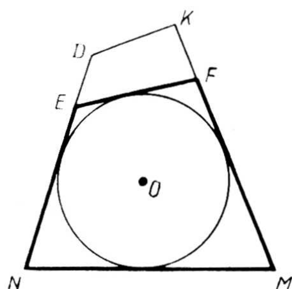
Nubrėžkime tiesę M_1M_2. Ji yra ieškomasis atkarpos AB vidurio statmuo. Įsitikinsime. Taškai M_1 ir M_2 vienodai nutolę nuo atkarpos AB galų, todėl jie yra tos atkarpos vidurio statmenyje. Vadinasi, tiesė M_1M_2 ir yra atkarpos AB vidurio statmuo.

687. Duota tiesė a bei du taškai A ir B, esantys vienoje tiesės pusėje. Raskite tiesės a tašką M, vienodai nutolusį nuo taškų A ir B.

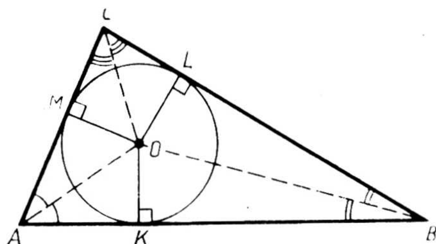
688. Duotas kampas ir atkarpa. Raskite kampo vidaus tašką, vienodai nutolusį nuo kampo kraštinių ir vienodai nutolusį nuo tos atkarpos galų.

§ 4. ĮBRĖŽTINIS IR APIBRĖŽTINIS APSKRITIMAI

74. Įbrėžtinis apskritimas. Jei daugiakampio visos kraštinės liečia apskritimą, tai apskritimas vadinamas *įbrėžtu į daugiãkampį* (įbrėžtiniu apskritimu), o daugiakampis — *apibrėžtu apie tą apskritimą* (apibrėžtiniu daugiakampiu). 231 paveiksle keturkampis $EFMN$ apibrėžtas apie apskritimą, kurio centras O, o keturkampis $DKMN$ nėra apibrėžtas apie tą apskritimą, nes kraš-



231 pav.



232 pav.

tinė DK apskritimo neliečia. 232 paveiksle trikampis ABC apibrėžtas apie apskritimą, kurio centras O.

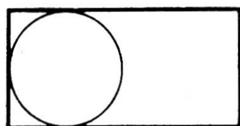
Įrodysime į trikampį įbrėžto apskritimo teoremą.

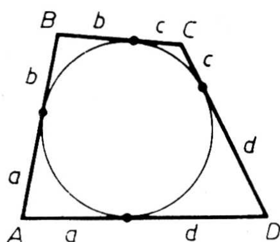
Teorema. ***Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą.***

Įrodymas. Išnagrinėkime bet kokį trikampį ABC. Jo pusiaukampinių susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Iš taško O nuleiskime statmenis OK, OL ir OM į trikampio kraštines AB, BC ir CA (žr. 232 pav.). Kadangi taškas O vienodai nutolęs nuo trikampio ABC kraštinių, tai $OK=OL=OM$. Iš to išplaukia, kad apskritimas, kurio centras O, o spindulys OK, eina per taškus K, L, M. Trikampio ABC kraštinės liečia tą apskritimą taškuose K, L ir M, nes jos statmenos spinduliams OK, OL ir OM. Vadinasi, apskritimas, kurio centras O ir spindulys OK, yra įbrėžtas į trikampį ABC. Teorema įrodyta.

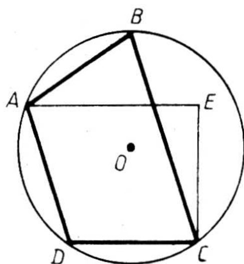
Pastabos. 1) *Į trikampį galima įbrėžti tik vieną apskritimą.* Įsitikinsime. Tarkime, kad į trikampį galima įbrėžti du apskritimus. Tada kiekvieno apskritimo centras vienodai nutolęs nuo trikampio kraštinių, vadinasi, sutampa su trikampio pusiaukampinių susikirtimo tašku O, o spindulys lygus atstumui nuo taško O iki trikampio kraštinių. Taigi tie apskritimai sutampa.

2) *Ne į kiekvieną keturkampį galima įbrėžti apskritimą.* Pavyzdžiui, išnagrinėkime stačiakampį, kurio gretimos kraštinės nelygios, t. y. stačiakampį, kuris nėra kvadratas. Aišku, kad į tokį stačiakampį galima „įdėti" apskritimą, liečiantį jo tris kraštines (233 pav., *a*), tačiau negalima „įdėti" apskritimo, kuris liestų visas keturias jo kraštines, t. y. negalima įbrėžti apskritimo. Jeigu į keturkampį galima įbrėžti apskritimą, tai jo kraštinėms būdinga šitokia savybė.





233 pav.



234 pav.

Kiekvieno apibrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių sumos lygios.

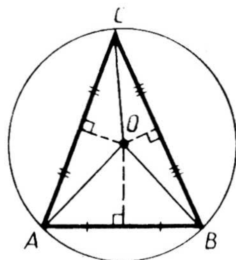
Tuo lengva įsitikinti pasinaudojant 233 paveikslu, *b*, kuriame tomis pačiomis raidėmis pažymėtos lygios liestinių atkarpos. Turime: $AB+CD=a+b+c+d$, $BC+AD=a+b+c+d$, todėl $AB+$ $+CD=BC+AD$.

Pasirodo, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei iškilojo keturkampio priešingųjų kraštinių sumos lygios, tai į jį galima įbrėžti apskritimą (žr. 724 uždavinį).

75. Apibrėžtinis apskritimas. Jei visos daugiakampio viršūnės yra apskritimo taškai, tai apskritimas vadinamas *apibrėžtu apie daugiakampį* (apibrėžtiniu apskritimu), o daugiakampis — *įbrėžtu į tą apskritimą* (įbrėžtiniu daugiakampiu). 234 paveiksle keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, kurio centras O, o keturkampis $AECD$ nėra įbrėžtas į tą apskritimą, nes viršūnė E nėra apskritimo taškas. 235 paveiksle trikampis ABC įbrėžtas į apskritimą, kurio centras O.

Įrodysime apie trikampį apibrėžto apskritimo teoremą.

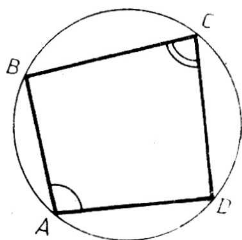
T e o r e m a. ***Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą.***



235 pav.

Į r o d y m a s. Išnagrinėkime bet kokį trikampį ABC. Jo kraštinių vidurio statmenų susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Nubrėžkime atkarpas OA, OB ir OC (žr. 235 pav.). Kadangi taškas O vienodai nutolęs nuo trikampio ABC viršūnių, tai $OA=$ $=OB=OC$. Todėl apskritimas, kurio centras O ir spindulys OA, eina per visas tris trikampio viršūnes, taigi jis yra apibrėžtas apie trikampį ABC. Teorema įrodyta.

P a s t a b o s. 1) *Apie trikampį galima apibrėžti tik vieną apskritimą.* Įsitikinsime. Tarkime, kad apie trikampį galima apibrėžti du apskritimus. Tada kiekvieno apskritimo centras vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių, todėl sutampa su trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo tašku O, o spindulys lygus atstumui nuo taško O iki trikampio viršūnių. Vadinasi, tie apskritimai sutampa.



236 pav.

2) *Apie keturkampį ne visada galima apibrėžti apskritimą.* Pavyzdžiui, apie rombą, kuris nėra kvadratas, negalima apibrėžti apskritimo (paaiškinkite, kodėl). Jeigu apie keturkampį galima apibrėžti apskritimą, tai jo kampams būdinga šitokia savybė.

Kiekvieno įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kampų suma lygi 180°.

Tuo nesunku įsitikinti pasinaudojant 236 paveikslu ir remiantis įbrėžtinio kampo teorema. Turime:

$$\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD, \quad \angle C = \frac{1}{2} \smile BAD,$$

todėl

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Teisingas ir atvirkštinis teiginys: *jeigu keturkampio priešingųjų kampų suma lygi* 180°, *tai apie jį galima apibrėžti apskritimą* (žr. 729 uždavinį).

Uždaviniai

689. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 10 cm, šoninė kraštinė lygi 13 cm. Raskite į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

690. Į lygiašonį trikampį įbrėžto apskritimo centras aukštinę, nuleistą į pagrindą, dalija santykiu 12 : 5, pradedant nuo viršūnės, o šoninė kraštinė lygi 60 cm. Raskite pagrindą.

691. Į lygiašonį trikampį įbrėžto apskritimo ir šoninės kraštinės lietimosi taškas tą kraštinę dalija į 3 cm ir 4 cm atkarpas, pradedant nuo pagrindo. Raskite trikampio perimetrą.

692. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas, kuris kraštines AB, BC ir AC liečia taškuose P, Q ir R. Raskite AP, PB, BQ, QC, CR, RA, kai $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 5$ cm.

693. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys r. Raskite trikampio perimetrą, kai: a) įžambinė lygi 26 cm, $r=4$ cm; b) lietimosi taškas įžambinę dalija į 5 cm ir 12 cm atkarpas.

694. Stačiojo trikampio įžambinė lygi c, o statinių suma lygi m. Raskite į trikampį įbrėžto apskritimo skersmenį.

695. Apibrėžtinio keturkampio dviejų priešingųjų kraštinių suma lygi 15 cm. Raskite to keturkampio perimetrą.

696. Įrodykite: jei į lygiagretainį galima įbrėžti apskritimą, tai tas lygiagretainis — rombas.

697. Įrodykite: apibrėžtinio daugiakampio plotas lygus pusei jo perimetro ir įbrėžtinio apskritimo spindulio sandaugos.

698. Apibrėžtinio keturkampio dviejų priešingųjų kraštinių suma lygi 12 cm, o įbrėžto į jį apskritimo spindulys lygus 5 cm. Raskite keturkampio plotą.

699. Apibrėžtinio keturkampio dviejų priešingųjų kraštinių suma lygi 10 cm, o plotas — 12 cm^2. Raskite į tą keturkampį įbrėžto apskritimo spindulį.

700. Įrodykite, kad į kiekvieną rombą galima įbrėžti apskritimą.

701. Nubraižykite tris trikampius: smailųjį, statųjį ir bukąjį. Į kiekvieną jų įbrėžkite apskritimą.

702. Į apskritimą įbrėžtas trikampis ABC; AB — apskritimo skersmuo. Raskite trikampio kampus, kai: a) $\smile BC=134°$; b) $\smile AC=70°$.

703. Į apskritimą įbrėžtas lygiašonis trikampis ABC, kurio pagrindas BC. Raskite trikampio kampus, kai $\smile BC=102°$.

704. Apie statųjį trikampį apibrėžtas apskritimas, jo centras O. a) Įrodykite, kad taškas O — įžambinės vidurys. b) Raskite trikampio kraštines, kai apskritimo skersmuo lygus d, o trikampio vienas smailusis kampas lygus α.

705. Apie statųjį trikampį ABC, kurio kampas C — statusis, apibrėžtas apskritimas. Raskite to apskritimo spindulį, kai: a) $AC=8$ cm, $BC=6$ cm; b) $AC=18$ cm, $\angle B=30°$.

706. Apie lygiakraštį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus 10 cm. Raskite trikampio kraštinę.

707. Prieš lygiašonio trikampio pagrindą esantis kampas lygus 120° šoninė kraštinė lygi 8 cm. Raskite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo skersmenį.

708. Įrodykite, kad: a) apie kiekvieną stačiakampį galima apibrėžti apskritimą; b) apie kiekvieną lygiašonę trapeciją galima apibrėžti apskritimą.

709. Įrodykite: jeigu apie lygiagretainį galima apibrėžti apskritimą, tai tas lygiagretainis — stačiakampis.

710. Įrodykite: jeigu apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą, tai ta trapecija lygiašonė.

711. Nubraižykite tris trikampius: bukąjį, statųjį ir smailųjį. Apie kiekvieną jų apibrėžkite apskritimą.

VIII SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Išnagrinėkite tiesės ir apskritimo tarpusavio padėtį, atsižvelgdami į apskritimo spindulio ir atstumo nuo jo centro iki tiesės ryšį. Pasakykite gautas išvadas.
2. Kokia tiesė vadinama apskritimo kirstine?
3. Kokia tiesė vadinama apskritimo liestine? Koks taškas vadinamas tiesės ir apskritimo lietimosi tašku?
4. Suformuluokite ir įrodykite liestinės savybės teoremą.
5. Įrodykite, kad apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpos lygios ir su tiese, einančia per tą tašką ir apskritimo centrą, sudaro lygius kampus.
6. Suformuluokite ir įrodykite liestinės savybės teoremai atvirkštinę teoremą.
7. Paaiškinkite, kaip per duotą apskritimo tašką galima nubrėžti to apskritimo liestinę.
8. Koks kampas vadinamas apskritimo centriniu kampu?
9. Paaiškinkite, koks lankas vadinamas pusapskritimiu, koks — mažesniu už pusapskritimį, koks — didesniu už pusapskritimį.
10. Kaip apibrėžiamas lanko laipsninis matas? Kaip jis žymimas?
11. Koks kampas vadinamas įbrėžtiniu? Suformuluokite ir įrodykite įbrėžtinio kampo teoremą.
12. Įrodykite, kad įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką, lygūs.
13. Įrodykite, kad įbrėžtinis kampas, besiremiantis į pusapskritimį,— statusis.
14. Suformuluokite ir įrodykite susikertančių stygų atkarpų teoremą.
15. Suformuluokite ir įrodykite kampo pusiaukampinės teoremą.

16. Įrodykite, kad trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške.
17. Kokia tiesė vadinama atkarpos vidurio statmeniu?
18. Suformuluokite ir įrodykite atkarpos vidurio statmens teoremą.
19. Įrodykite, kad trikampio kraštinių vidurio statmenys susikerta viename taške.
20. Suformuluokite ir įrodykite trikampio aukštinių susikirtimo teoremą.
21. Koks apskritimas vadinamas įbrėžtu į daugiakampį (įbrėžtiniu)? Koks daugiakampis vadinamas apibrėžtu apie apskritimą (apibrėžtiniu)?
22. Suformuluokite ir įrodykite į trikampį įbrėžto apskritimo teoremą. Kiek apskritimų galima įbrėžti į trikampį?
23. Kokia apibrėžtinio keturkampio kraštinių būdinga savybė?
24. Koks apskritimas vadinamas apibrėžtu apie daugiakampį? Koks daugiakampis vadinamas įbrėžtu į apskritimą?
25. Suformuluokite ir įrodykite apie trikampį apibrėžto apskritimo teoremą. Kiek apskritimų galima apibrėžti apie trikampį?
26. Kokia įbrėžtinio keturkampio kampų būdinga savybė?

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

712. Įrodykite, kad apskritimo liestinės, einančios per stygos, kuri nėra apskritimo skersmuo, galus, susikerta.

713. Tiesės AB ir AC — apskritimo, kurio centras O, liestinės, B ir C — lietimosi taškai. Per bet kurį lanko BC tašką X nubrėžta to apskritimo liestinė; ji atkarpas AB ir AC kerta taškuose M ir N. Įrodykite, kad trikampio AMN perimetras ir kampas MON nepriklauso nuo lanko BC taško X.

714*. Du apskritimai turi bendrą tašką M ir bendrą liestinę tame taške. Tiesė AB vieną apskritimą liečia taške A, kitą — taške B. Įrodykite, kad taškas M yra apskritimo, kurio skersmuo AB, taškas.

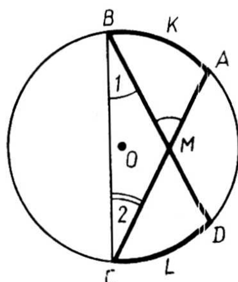
715. Apskritimo skersmuo AA_1 statmenas stygai BB_1. Įrodykite, kad mažesnių už pusapskritimį lankų AB ir AB_1 laipsniniai matai lygūs.

716. A, B, C ir D — apskritimo taškai. Įrodykite: jei $\smile AB = \smile CD$, tai $AB = CD$.

717. Atkarpa AB — apskritimo skersmuo, o stygos BC ir AD lygiagrečios. Įrodykite, kad styga CD — apskritimo skersmuo.

718. Remdamiesi 237 paveikslo duomenimis, įrodykite, kad

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB).$$



237 pav.

Sprendimas. Nubrėžkime stygą BC. Kadangi $\angle AMB$ — trikampio BMC priekampis, tai $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. Remiantis įbrėžtinio kampo teorema, $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile CLD$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile AKB$, todėl

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB).$$

719. Per šalia apskritimo esantį tašką nubrėžtos dvi kirstinės. Įrodykite, kad kampas tarp jų matuojamas kampo viduje esančių lankų skirtumo puse.

720. Ar įvairiakraščio trikampio viršūnė gali būti kurios nors kraštinės vidurio statmenyje? Atsakymą pagrįskite.

721. Įrodykite: jei į stačiakampį galima įbrėžti apskritimą, tai tas stačiakampis — kvadratas.

722. Keturkampis $ABCD$ apibrėžtas apie apskritimą, kurio spindulys r; $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$. Keturkampio plotas lygus S. Raskite keturkampio kraštines.

723. Įrodykite: jei tiesės, kuriose yra trapecijos pagrindai, liečia apskritimą ir lietimosi taškai priklauso pagrindams, tai trapecijos vidurinė linija eina per apskritimo centrą.

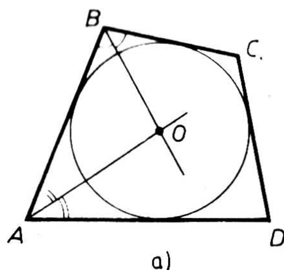
724. Įrodykite: jei iškilojo keturkampio priešingųjų kraštinių sumos lygios, tai į tą keturkampį galima įbrėžti apskritimą.

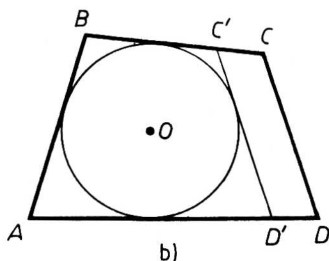
Sprendimas. Sakykime, iškilojo keturkampio $ABCD$

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

Kampų A ir B pusiaukampinių susikirtimo taškas O vienodai nutolęs nuo kraštinių AD, AB ir BC, todėl galima nubrėžti apskritimą, kurio centras O, liečiantį nurodytas tris kraštines (238 pav., *a*). Įrodysime, kad tas apskritimas liečia ir kraštinę CD, taigi jis yra įbrėžtas į keturkampį $ABCD$.

Tarkime, kad taip nėra. Tada tiesė CD arba neturi su apskritimu bendrų taškų, arba yra kirstinė. Išnagrinėkime





238 pav.

pirmąjį atvejį (238 pav., *b*). Nubrėžkime liestinę $C'D'$, lygiagrečią tiesei CD (C' ir D' — liestinės bei kraštinių BC ir AD susikirtimo taškai). Kadangi $ABC'D'$ — apibrėžtinis keturkampis, tai, remiantis jo kraštinių savybe,

$$AB+C'D'=BC'+AD'. \qquad (2)$$

Tačiau $BC'=BC-C'C$, $AD'=AD-DD'$, todėl iš (2) lygybės gauname:

$$C'D'+C'C+D'D=BC+AD-AB.$$

Šios lygybės dešinioji pusė, remiantis (1) lygybe, lygi CD. Taigi gauname lygybę

$$C'D'+C'C+D'D=CD,$$

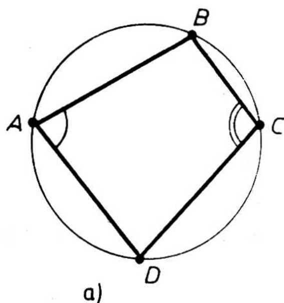
t. y. keturkampio $C'CDD'$ viena kraštinė lygi kitų trijų kraštinių sumai. Tačiau taip negali būti, todėl prielaida neteisinga. Panašiai galima įrodyti, kad tiesė CD negali būti apskritimo kirstinė. Vadinasi, apskritimas liečia tiesę CD. Tai ir reikėjo įrodyti.

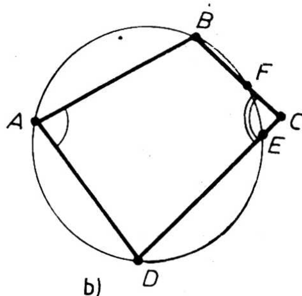
725. Stačiosios trapecijos pagrindai a ir b, į ją įbrėžtas apskritimas. Raskite apskritimo spindulį.

726. Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra pusiaukraštinėje. Įrodykite, kad tas trikampis arba lygiašonis, arba status.

727. Į lygiašonį trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio centras O_1, apie tą trikampį apibrėžtas apskritimas, kurio centras O_2. Įrodykite, kad taškai O_1 ir O_2 yra trikampio pagrindo vidurio statmenyje.

728. Įrodykite: jei apie rombą galima apibrėžti apskritimą, tai tas rombas — kvadratas.





239 pav.

729*. Įrodykite: jei keturkampio priešingųjų kampų suma lygi 180°, tai apie tą keturkampį galima apibrėžti apskritimą.
S p r e n d i m a s. Sakykime, keturkampio $ABCD$

$$\angle A + \angle C = 180°. \quad (1)$$

Per tris keturkampio viršūnes — A, B ir D — nubrėžkime apskritimą (239 pav., *a*). Įrodysime, kad jis eina ir per viršūnę C, t. y. jis apibrėžtas apie keturkampį $ABCD$. Tarkime, kad taip nėra. Tada viršūnė C yra arba šalia skritulio, arba jo viduje. Išnagrinėsime pirmąjį atvejį (239 pav., *b*). Šiuo atveju $\angle C = \frac{1}{2}(\smile DAB - \smile EF)$ (719 uždavinys), todėl $\angle C < \frac{1}{2} \smile DAB$. Kadangi $\angle A = \frac{1}{2} \smile BED$, tai $\angle A + \angle C < \frac{1}{2}(\smile BED + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Taigi gavome, kad $\angle A + \angle C < 180°$ Tačiau tai prieštarauja (1) sąlygai, todėl prielaida neteisinga. Panašiai galima įrodyti (remiantis 718 uždaviniu), kad taškas C negali būti skritulio viduje. Vadinasi, taškas C yra apskritimo taškas. Tai ir reikėjo įrodyti.

730. Per taškus A ir B nubrėžtos tiesės, statmenos kampo AOB kraštinėms ir susikertančios kampo vidaus taške C. Įrodykite, kad apie keturkampį $ACBO$ galima apibrėžti apskritimą.

731. Įrodykite, kad apie iškiląjį keturkampį $ABCD$, gautą susikirtus trapecijos kampų pusiaukampinėms, galima apibrėžti apskritimą.

732. Iš stačiojo trikampio ABC kraštinės AC taško M nuleistas statmuo MH į įžambinę AB. Įrodykite, kad kampai MHC ir MBC lygūs.

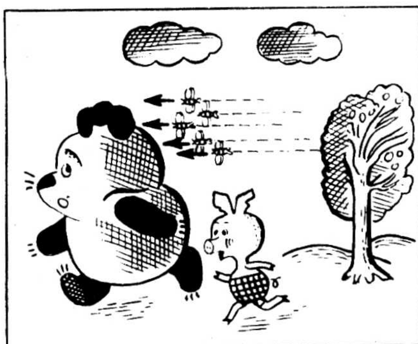
733. Apie lygiakraštį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus 10 cm. Raskite į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

734. Įrodykite: jei į lygiagretainį galima įbrėžti apskritimą ir apie jį galima apibrėžti apskritimą, tai tas lygiagretainis — kvadratas.

735. Į trapeciją, kurios pagrindai a ir b, galima įbrėžti apskritimą; apie tą trapeciją galima apibrėžti apskritimą. Raskite įbrėžtinio apskritimo spindulį.

736. Duota tiesė a, tos tiesės taškas A ir taškas B, nesantis tiesėje a. Nubrėžkite apskritimą, einantį per tašką B ir taške A liečiantį tiesę a.

737. Duotos dvi lygiagrečios tiesės ir nė vienoje jų nesantis taškas. Nubrėžkite apskritimą, einantį per duotą tašką ir liečiantį duotas tieses.



IX skyrius

VEKTORIAI

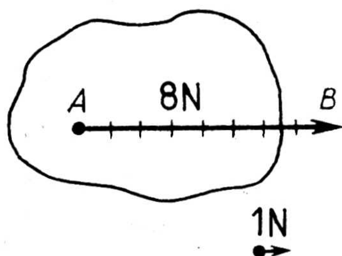
§ 1. VEKTORIAUS SĄVOKA

76. Vektoriaus sąvoka. Daugelį fizikinių dydžių, pavyzdžiui, jėgą, materialiojo taško poslinkį, greitį, apibūdina ne tik jų skaitinė reikšmė, bet ir kryptis erdvėje. Tokie fizikiniai dydžiai vadinami *vektòriniais dỹdžiais* (trumpiau — *vèktoriais*).

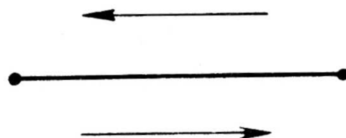
Išnagrinėkime pavyzdį. Sakykime, kūną veikia 8 N jėga. Paveiksle jėga vaizduojama atkarpa su rodykle (240 pav.). Rodyklė rodo jėgos kryptį, o atkarpos ilgis pasirinktuoju masteliu atitinka jėgos skaitinę reikšmę. Pavyzdžiui, 240 paveiksle 1 N jėga pavaizduota 0,4 cm ilgio atkarpa, todėl 8 N jėga pavaizduota 3,2 cm ilgio atkarpa.

Atsiribodami nuo fizikinių vektorinių dydžių konkrečių savybių, prieiname geometrinę vektoriaus sąvoką.

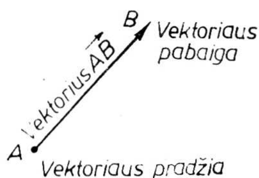
Išnagrinėkime bet kurią atkarpą. Galima nurodyti dvi jos kryptis: iš vieno galo į kitą ir atvirkščiai (241 pav.). Norėdami pasirinkti vieną kryptį, vieną atkarpos galą vadinsime *pradžià*, kitą — *pãbaiga* ir laikysime, kad atkarpa nukreipta iš pradžios į pabaigą.



240 pav.



241 pav.



242 pav.

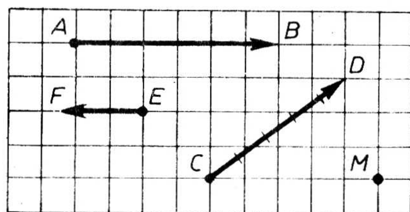
Apibrėžimas. *Atkarpa, kurios nurodyta pradžia ir pabaiga, vadinama kryptine atkarpa arba vektoriumi.*

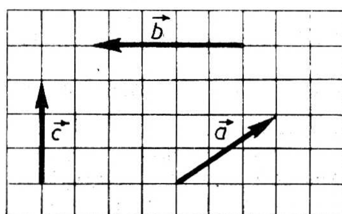
Paveiksluose vektorius vaizduojamas atkarpa su rodykle, kuri rodo vektoriaus kryptį. Vektoriai žymimi dviem didžiosiomis raidėmis su rodykle viršuje, pavyzdžiui, $\vec{AB}$. Pirmoji raidė rodo vektoriaus pradžią, antroji — pabaigą (242 pav.).

243 paveiksle, *a*, pavaizduoti vektoriai $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$; taškai A, C, E — tų vektorių pradžios, o B, D, F — jų pabaigos. Dažnai vektoriai žymimi viena mažąja raide su rodykle virš jos: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (243 pav., *b*).

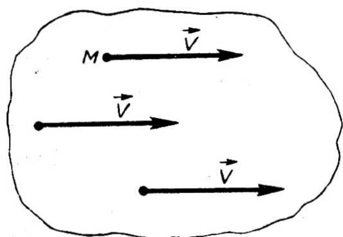
Toliau tikslinga susitarti, kad kiekvienas plokštumos taškas irgi yra vektorius. Tokiu atveju vektorius vadinamas *nùliniu*. Nulinio vektoriaus pradžia sutampa su pabaiga, paveiksle toks vektorius vaizduojamas vienu tašku. Pavyzdžiui, jei nulinį vektorių vaizduojantis taškas pažymėtas raide M, tai tą nulinį vektorių galima pažymėti $\vec{MM}$ (243 pav., *a*). Nulinis vektorius dar žymimas ženklu $\vec{0}$. 243 paveiksle vektoriai $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ nenuliniai, o vektorius $\vec{MM}$ nulinis.

Nenulinio vektoriaus $\vec{AB}$ *ilgiù*, arba mòduliu vadinamas atkarpos AB ilgis. Vektoriaus $\vec{AB}$ (vektoriaus $\vec{a}$) ilgis žymimas šitaip: $|\vec{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Laikoma, kad nulinio vektoriaus ilgis lygus nuliui: $|\vec{0}|=0$.

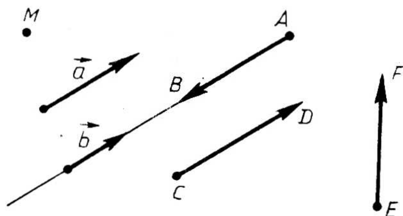




243 pav. a) b)



244 pav.



245 pav.

243 paveiksle pavaizduotų vektorių ilgiai šitokie: $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{CD}|=5$, $|\overrightarrow{EF}|=2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}|=0$, $|\vec{a}|=\sqrt{13}$, $|\vec{b}|=4{,}5$, $|\vec{c}|=3$ (paveiksle kiekvieno langelio kraštinė lygi atkarpų matavimo vienetui).

77. Vektorių lygumas. Prieš apibrėždami lygius vektorius, išnagrinėsime pavyzdį. Pasirinkime kūną, kurio visi taškai juda tuo pačiu greičiu ir ta pačia kryptimi. Kūno kiekvieno taško greitis yra vektorinis dydis, todėl jį galima pavaizduoti kryptine atkarpa, kurios pradžia sutampa su tašku M (244 pav.). Kadangi visi kūno taškai juda tuo pačiu greičiu, tai visos kryptinės atkarpos, vaizduojančios tų taškų greičius, turi tą pačią kryptį, o jų ilgiai lygūs.

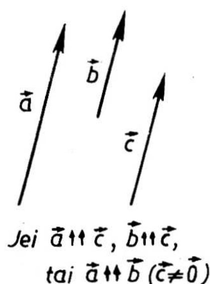
Šis pavyzdys nusako, kaip reikia apibrėžti lygius vektorius. Tačiau prieš tai supažindinsime su kolineariųjų vektorių sąvoka.

Nenuliniai vektoriai, kurie yra arba vienoje tiesėje, arba lygiagrečiose tiesėse, vadinami kolineariaisiais; laikoma, kad *nulinis vektorius kolinearus kiekvienam vektoriui.*

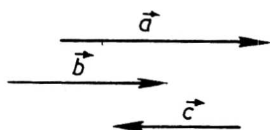
245 paveiksle vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ (vektorius $\overrightarrow{MM}$ nulinis) kolinearūs, o vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{EF}$ nekolinearūs.

Jei du nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs, tai jie gali būti vienodai nukreipti, arba priešingai nukreipti. Pirmuoju atveju vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami *vienakrypčiais*, antruoju — *priešpriešiais*[1]. Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai, tai rašoma $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; jei jie

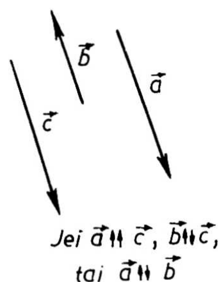
[1] Tas sąvokas nesunku ir tiksliai apibrėžti. Pavyzdžiui, du nenuliniai vektoriai, esantys lygiagrečiose tiesėse, vadinami vienakrypčiais (priešpriešiais), jei jų pabaigos yra per jų pradžias einančios tiesės vienoje pusėje (skirtingose pusėse). Kaip galima suformuluoti panašų apibrėžimą, kai nenuliniai vektoriai yra vienoje tiesėje?



a)



b)



c)

246 pav.

priešpriešiai, rašoma $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. 245 paveiksle $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$.

Nulinio vektoriaus pradžia sutampa su jo pabaiga, todėl nulinis vektorius neturi jokios krypties. Kitaip sakant, kiekvieną kryptį galima laikyti nulinio vektoriaus kryptimi. Laikysime, kad nulinis vektorius vienakryptis su kiekvienu vektoriumi. Taigi 245 paveiksle $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\vec{a}$ ir t. t.

246 paveiksle atskleistos nenulinių kolineariųjų vektorių savybės.

Dabar pateiksime lygių vektorių apibrėžimą.

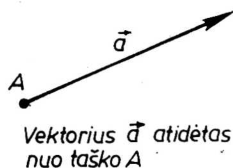
A p i b r ė ž i m a s. *Vienakrypčiai vektoriai, kurių ilgiai lygūs, vadinami lýgiais.*

Taigi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygūs, kai $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ir $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygumas žymimas šitaip: $\vec{a}=\vec{b}$.

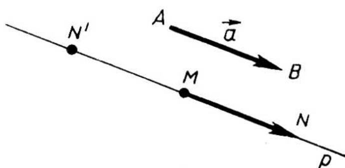
78. Vektoriaus atidėjimas nuo duoto taško. Jei taškas A — vektoriaus $\vec{a}$ pradžia, tai sakoma, kad *vektorius $\vec{a}$ atidėtas nuo taško A* (247 pav.). Įrodysime šitokį teiginį.

Nuo kiekvieno taško M galima atidėti vektorių, lygų duotam vektoriui $\vec{a}$, tačiau tik vieną.

Įsitikinsime. Jei $\vec{a}$ — nulinis vektorius, tai ieškomasis vektorius yra $\overrightarrow{MM}$. Tarkime, kad vektorius $\vec{a}$ nenulinis, o taškai A ir B — jo pradžia ir pabaiga. Per tašką M nubrėžkime tiesę p, lygiagrečią AB (248 pav.) (jei M — tiesės AB taškas, tai tiesę p atstos tiesė AB). Tiesėje p atidėkime atkarpas MN ir MN', lygias



247 pav.



248 pav.

atkarpai AB, ir iš vektorių $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{MN'}$ parinkime tą, kuris vienakryptis su vektoriumi $\vec{a}$ (248 paveiksle vektorių $\overrightarrow{MN}$). Tas vektorius ir yra ieškomasis vektorius, lygus vektoriui $\vec{a}$. Iš brėžimo aišku, kad toks vektorius tik vienas.

P a s t a b a. Lygūs vektoriai, atidėti nuo skirtingų taškų, dažnai žymimi ta pačia raide. Pavyzdžiui, 244 paveiksle taip pažymėti lygūs skirtingų taškų greičio vektoriai. Dažnai sakoma, kad tai tas pats vektorius, tik atidėtas nuo skirtingų taškų.

Praktikos darbai

738. Pažymėkite tris taškus (A, B ir C), nesančius vienoje tiesėje. Nubrėžkite visus nenulinius vektorius, kurių pradžia ir pabaiga yra kurie nors du iš tų taškų. Užrašykite visus gautus vektorius, nurodykite kiekvieno vektoriaus pradžią ir pabaigą.

739. Pasirinkę tinkamą mastelį, nubrėžkite vektorius, vaizduojančius lėktuvo skrydį iš pradžių 300 km į pietus iš miesto A į miestą B, po to 500 km į rytus iš miesto B į miestą C. Po to nubrėžkite vektorių $\overrightarrow{AC}$, kuris vaizduoja poslinkį iš pradinio taško į galutinį.

740. Nubrėžkite vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{EF}$, tenkinančius šitokias sąlygas: a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{EF}$ kolinearūs, $|\overrightarrow{AB}|=1$ cm, $|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{EF}|=4{,}5$ cm; b) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{EF}$ kolinearūs, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ nekolinearūs ir $|\overrightarrow{AB}|=3$ cm, $|\overrightarrow{CD}|=1{,}5$ cm, $|\overrightarrow{EF}|=1$ cm.

741. Nubrėžkite du nekolinearius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Pavaizduokite keletą vektorių: a) vienakrypčių su vektoriumi $\vec{a}$; b) vienakrypčių su vektoriumi $\vec{b}$; c) priešpriešių vektoriui $\vec{a}$.

742. Nubrėžkite du vektorius: a) turinčius lygius ilgius, bet nekolinearius; b) turinčius lygius ilgius ir vienakrypčius; c) turinčius lygius ilgius ir priešpriešius. Kuriuo atveju gauname lygius vektorius?

743. Nubrėžkite nenulinį vektorių $\vec{a}$. Plokštumoje pažymėkite tris taškus: A, B ir C. Nuo taškų A, B ir C atidėkite vektorius, lygius vektoriui $\vec{a}$.

Klausimai ir uždaviniai

744. Kurie iš išvardytų dydžių vektoriniai: greitis, masė, jėga, laikas, temperatūra, ilgis, plotas, darbas?

745. Stačiakampio $ABCD$ $AB=3$ cm, $BC=4$ cm, M — kraštinės AB vidurys. Raskite vektorių $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{DC}$, $\vec{MC}$, $\vec{MA}$, $\vec{CB}$, $\vec{AC}$ ilgius.

746. Stačiosios trapecijos $ABCD$, kurios kampas A — statusis, pagrindas AD lygus 12 cm, $AB=5$ cm, $\angle D=45°$. Raskite vektorių $\vec{BD}$, $\vec{CD}$ ir $\vec{AC}$ ilgius.

747. Parašykite kolinearių vektorių poras, kurias nusako: a) lygiagretainio $MNPQ$ kraštinės; b) trapecijos $ABCD$, kurios pagrindai AD ir BC, kraštinės; c) trikampio FGH kraštinės. Nurodykite vienakrypčių vektorių poras ir priešpriešių vektorių poras.

748. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Ar lygūs vektoriai: a) $\vec{AB}$ ir $\vec{DC}$; b) $\vec{BC}$ ir $\vec{DA}$; c) $\vec{AO}$ ir $\vec{OC}$; d) $\vec{AC}$ ir $\vec{BD}$? Atsakymą pagrįskite.

749. S ir T yra lygiašonės trapecijos $MNLK$ šoninių kraštinių MN ir LK vidurio taškai. Ar lygūs vektoriai: a) $\vec{NL}$ ir $\vec{KL}$; b) $\vec{MS}$ ir $\vec{SN}$; c) $\vec{MN}$ ir $\vec{KL}$; d) $\vec{TS}$ ir $\vec{KM}$; e) $\vec{TL}$ ir $\vec{KT}$?

750. Įrodykite: jei vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ lygūs, tai atkarpų AD ir BC vidurio taškai sutampa. Įrodykite atvirkštinį teiginį: jei atkarpų AD ir BC vidurio taškai sutampa, tai $\vec{AB}=\vec{CD}$.

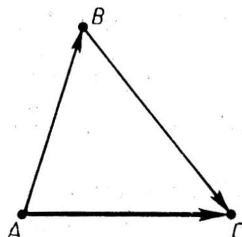
751. Išaiškinkite keturkampio $ABCD$ rūšį kai: a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ir $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$; b) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$, o vektoriai $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BC}$ nekolinearūs.

752. Ar teisingas teiginys: a) jei $\vec{a}=\vec{b}$, tai $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; b) jei $\vec{a}=\vec{b}$, tai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs; c) jei $\vec{a}=\vec{b}$, tai $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$; d) jei $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, tai $\vec{a}=\vec{b}$; e) jei $\vec{a}=\vec{0}$, tai $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$?

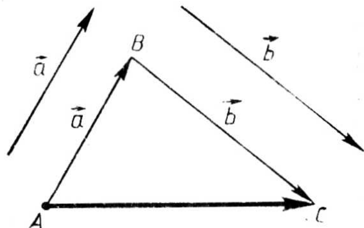
§ 2. VEKTORIŲ SUDĖTIS IR ATIMTIS

79. Dviejų vektorių suma. Išnagrinėkime pavyzdį. Sakykime, materialusis taškas iš taško A pasislinko į tašką B, po to iš taško B į tašką C (249 pav.). Atlikus tuos du poslinkius, kuriuos galima pavaizduoti vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BC}$, materialusis taškas iš taško A pasislinko į tašką C, todėl galutinį rezultatą galima pavaizduoti vektoriumi $\overrightarrow{AC}$. Kadangi poslinkis iš taško A į tašką C gaunamas atlikus poslinkius iš taško A į tašką B ir iš taško B į tašką C, tai vektorių $\overrightarrow{AC}$ natūralu vadinti vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BC}$ suma: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

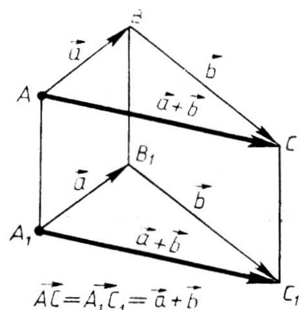
Dabar galime apibrėžti dviejų vektorių sumą. *Sakykime, $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ — du vektoriai. Pažymėkime bet kurį tašką A ir nuo to taško atidėkime vektorių $\overrightarrow{AB}$, lygų vektoriui $\vec{a}$* (250 pav.). *Po to nuo taško B atidėkime vektorių $\overrightarrow{BC}$, lygų vektoriui $\vec{b}$. Vektorius $\overrightarrow{AC}$ vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma.*



249 pav.



250 pav.



251 pav.

Ta vektorių sudėties taisyklė vadinama *trikampio taisyklė*. Pavadinimą paaiškina 250 paveikslas.

Įrodysime: jei sudėdami vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ tašką A, nuo kurio atidedamas vektorius $\vec{AB}=\vec{a}$, pakeisime kitu tašku A_1, tai vietoj vektoriaus $\vec{AC}$ gausime jam lygų vektorių $\vec{A_1C_1}$. Kitais žodžiais, įrodysime: jei $\vec{AB}=\vec{A_1B_1}$ ir $\vec{BC}=\vec{B_1C_1}$, tai $\vec{AC}=\vec{A_1C_1}$ (251 pav.).

Tarkime, kad taškai A, B, A_1, taškai B, C, B_1 ir taškai A, C, A_1 nėra vienoje tiesėje (kitus atvejus išnagrinėkite savarankiškai). Iš lygybės $\vec{AB}=\vec{A_1B_1}$ išplaukia, kad keturkampio ABB_1A_1 kraštinės AB ir A_1B_1 lygios ir lygiagrečios, todėl tas keturkampis — lygiagretainis. Vadinasi, $\vec{AA_1}=\vec{BB_1}$. Panašiai iš lygybės $\vec{BC}=\vec{B_1C_1}$ išplaukia, kad keturkampis BCC_1B_1 — lygiagretainis, todėl $\vec{BB_1}=\vec{CC_1}$. Iš gautųjų lygybių darome išvadą $\vec{AA_1}=\vec{CC_1}$. Tada AA_1C_1C — lygiagretainis, todėl $\vec{AC}=\vec{A_1C_1}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma žymima šitaip: $\vec{a}+\vec{b}$.

Pagal trikampio taisyklę sudėdami bet kokį vektorių $\vec{a}$ ir nulinį vektorių, prieiname šitokią išvadą. *Kad ir koks būtų vektorius $\vec{a}$, teisinga lygybė $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.*

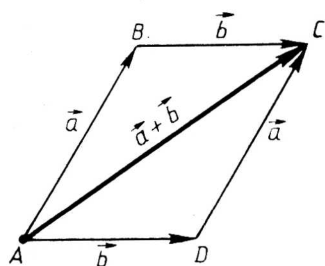
Trikampio taisyklę galima suformuluoti ir šitaip. *Jei A, B ir C — bet kurie taškai, tai $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$.* Pabrėžiame, kad tokia lygybė teisinga su bet kuriais taškais A, B ir C, skyrium imant, tuo atveju, kai du iš jų arba visi trys sutampa.

80. Vektorių sudėties dėsniai. Lygiagretainio taisyklė

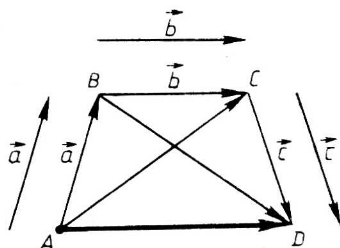
Teorema. ***Kad ir kokie būtų vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, teisingos lygybės:***

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ ***(perstatymo dėsnis);***

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ***(jungimo dėsnis).***



252 pav.



253 pav.

Įrodymas. 1⁰. Išnagrinėkime atvejį, kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs (atvejį, kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs, išnagrinėkite savarankiškai). Nuo bet kurio taško A atidėkime vektorius $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ir nubraižykime lygiagretainį, kaip parodyta 252 paveiksle. Remiantis trikampio taisykle, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$. Panašiai $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Iš čia išplaukia, kad $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2⁰. Nuo bet kurio taško A atidėkime vektorių $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, nuo taško B — vektorių $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, o nuo taško C — vektorių $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (253 pav.). Taikydami trikampio taisyklę gauname:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Iš čia išplaukia, kad $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Teorema įrodyta.

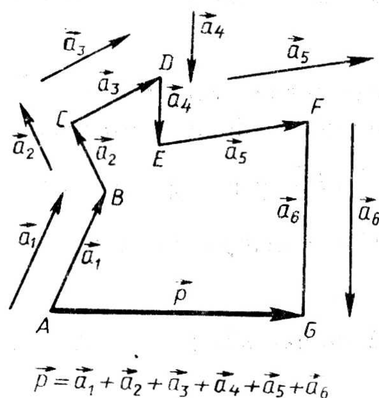
Įrodydami 1⁰ savybę pagrindėme vadinamąją nekolinearių vektorių sudėties *lygiagretainio taisyklę*: norint sudėti nekolinearius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, reikia nuo bet kurio taško A atidėti vektorius $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ir nubraižyti lygiagretainį $ABCD$ (žr. 252 pav.); tada vektorius $\overrightarrow{AC}$ lygus $\vec{a}+\vec{b}$. Lygiagretainio taisykle dažnai naudojamasi fizikoje, pavyzdžiui, sudedant dvi jėgas.

81. Kelių vektorių suma. Kelių vektorių sudėtis atliekama šitaip: pirmasis vektorius sudedamas su antruoju, po to jų suma

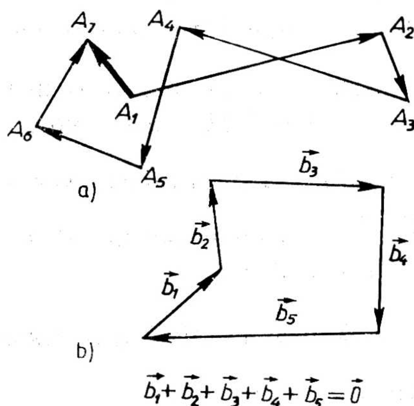
sudedama su trečiuoju vektoriumi ir t. t. Iš vektorių sudėties dėsnių išplaukia, kad kelių vektorių suma nepriklauso nuo to, kokia tvarka jie sudedami. 253 paveiksle parodytas vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sumos radimas: nuo bet kurio taško A atidėtas vektorius $\vec{AB}=\vec{a}$, po to nuo taško B atidėtas vektorius $\vec{BC}=\vec{b}$, pagaliau nuo taško C atidėtas vektorius $\vec{CD}=\vec{c}$. Gautas vektorius $\vec{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Panašiai galima rasti keturių, penkių ir apskritai bet kurio kiekio vektorių sumą. 254 paveiksle parodyta, kaip randama šešių vektorių suma. Tokia kelių vektorių sumos radimo taisyklė vadinama *daugiãkampio taisyklė*. Pavadinimą paaiškina 254 paveikslas.

Daugiakampio taisyklę galima suformuluoti ir šitaip: jei A_1, A_2, ..., A_n — bet kurie plokštumos taškai, tai $\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\ldots+\vec{A_{n-1}A_n}=\vec{A_1A_n}$ (255 paveiksle, *a*, $n=7$). Tokia lygybė teisinga su bet kuriais taškais A_1, A_2, ..., A_n, skyrium imant ir tada, kai dalis jų sutampa. Pavyzdžiui, jei pirmojo vektoriaus pradžia sutampa su paskutiniojo vektoriaus pabaiga, tai tų vektorių suma yra nulinis vektorius (255 pav., *b*).

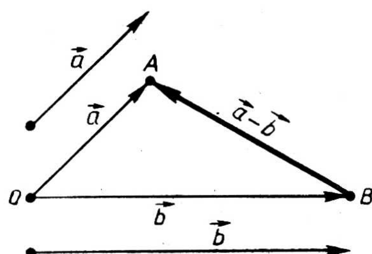
82. Vektorių atimtis. *Vèktorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumu vadinamas toks vektorius, kurį sudėję su vektoriumi $\vec{b}$ gauname vektorių $\vec{a}$.*

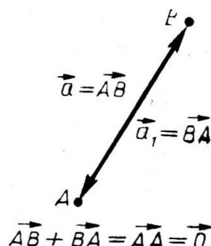


254 pav.



255 pav.





256 pav. 257 pav.

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumas žymimas šitaip: $\vec{a}-\vec{b}$.

Išnagrinėkime dviejų vektorių skirtumo radimo uždavinį.

Uždavinys. *Duoti vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Reikia rasti vektorių $\vec{a}-\vec{b}$.*

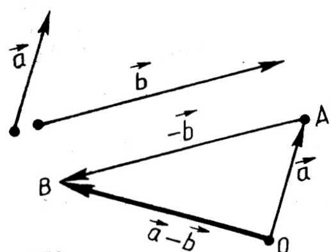
Sprendimas. Pažymėkime bet kurį plokštumos tašką O, nuo to taško atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (256 pav.). Remiantis trikampio taisykle, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$, arba $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$. Taigi vektorių $\overrightarrow{BA}$ ir $\vec{b}$ suma lygi vektoriui $\vec{a}$. Remiantis vektorių skirtumo apibrėžimu, $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, t. y. vektorius $\overrightarrow{BA}$ — ieškomasis.

Dviejų vektorių skirtumo radimo uždavinį galima spręsti ir kitu būdu. Prieš nurodydami tą būdą, pateikiame duotam vektoriui priešingo vektoriaus sąvoką.

Sakykime, $\vec{a}$ — bet kuris nenulinis vektorius. Vektoriai $\vec{a}_1$ ir $\vec{a}$, kurių ilgiai lygūs, bet kryptys priešingos, vadinami ***priešingais* vektoriais**. 257 paveiksle vektorius $\vec{a}_1=\overrightarrow{BA}$ priešingas vektoriui $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Laikoma, kad nuliniam vektoriui priešingas vektorius yra nulinis vektorius.

Vektoriui $\vec{a}$ priešingas vektorius žymimas šitaip: $-\vec{a}$. Aišku, kad $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Įrodysime vektorių skirtumo teoremą.



258 pav.

Teorema. *Kad ir kokie būtų vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, teisinga lygybė $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.*

Įrodymas. Remiantis vektorių skirtumo apibrėžimu, $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$. Prie šios lygybės abiejų pusių pridėję po vektorių $(-\vec{b})$, gauname:

$$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

arba

$$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Iš čia $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Teorema įrodyta.

Dabar minėtą uždavinį išspręsime kitaip. Pažymėkime bet kurį plokštumos tašką O ir nuo to taško atidėkime vektorių $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (258 pav.). Po to nuo taško A atidėkime vektorių $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$. Remiantis vektorių skirtumo teorema, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, todėl $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, t. y. vektorius $\overrightarrow{OB}$ — ieškomasis.

Praktikos darbai

753. Turistas išėjo iš miesto A ir visą laiką ėjo į rytus. Iš pradžių jis nuėjo 20 km iki miesto B, po to — 30 km iki miesto C. Pasirinkę tinkamą mastelį nubrėžkite vektorius $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BC}$. Ar lygūs vektoriai $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AC}$?

754. Nubrėžkite paporiui nekolinearius vektorius $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ir raskite vektorius $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{y}$.

755. Nubrėžkite paporiui nekolinearius vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ ir, taikydami daugiakampio taisyklę, raskite vektorių $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.

756. Nubrėžkite paporiui nekolinearius vektorius $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ir raskite vektorius $\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{z}-\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$.

757. Nubrėžkite vektorius $\vec{x}$, $\vec{y}$ ir $\vec{z}$, tenkinančius sąlygas $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{z}$. Raskite vektorius $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{x}+\vec{z}$.

758. Nubrėžkite du nenulinius kolinearius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, $|\vec{a}|\neq\neq|\vec{b}|$. Raskite vektorius: a) $\vec{a}-\vec{b}$; b) $\vec{b}-\vec{a}$; c) $-\vec{a}+\vec{b}$. Dar kartą nubrėžkite tuo atveju, kai $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Klausimai ir uždaviniai

759. Duotas bet koks keturkampis $MNPQ$. Įrodykite, kad:

a) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}$; b) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$.

760. Įrodykite: kad ir kokie būtų du nekolinearūs vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$, teisinga nelygybė $|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

761. A, B, C ir D — bet kurie taškai. Įrodykite, kad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}++\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

762. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinė lygi a. Raskite:

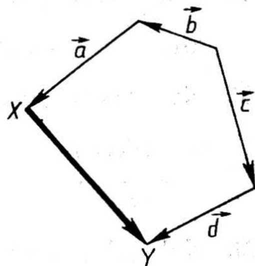
a) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; b) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; c) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$; d) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$;
e) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

763. Trikampio ABC $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90°$. Raskite:

a) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$ ir $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; b) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ ir $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$;
c) $|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{BC}|$ ir $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$; d) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$ ir $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

764. Remdamiesi daugiakampio taisykle, suprastinkite reiškinius:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD})$;
b) $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD})$.



259 pav.

765. X, Y, Z — bet kurie taškai. Įrodykite, kad $\vec{p}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YZ}$, $\vec{q}=(\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{XZ})++\overrightarrow{YZ}$ ir $\vec{r}=(\overrightarrow{ZY}-\overrightarrow{XY})-\overrightarrow{ZX}$ — nuliniai vektoriai.

766. 259 paveiksle pavaizduoti vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\overrightarrow{XY}$. Vektorių $\overrightarrow{XY}$ parašykite kaip kitų vektorių arba jiems priešingų vektorių sumą.

767. Duotas trikampis ABC. Vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ išreikškite šiuos vektorius: a) $\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.

Sprendimas. a) Vektoriai $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{AB}$ — priešingi; todėl $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, arba $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$. b) Remiantis trikampio taisykle, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Tačiau $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, todėl $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AC})=$ $=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$.

768. M ir N — trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Vektorius $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

769. Atkarpa BB_1 — trikampio ABC pusiaukraštinė. Vektorius $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ išreikškite vektoriais $\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}$ ir $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$.

770. Duotas lygiagretainis $ABCD$. Vektorių $\overrightarrow{AC}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kai: a) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; b) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$; c) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DA}$.

771. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ išreikškite šiuos vektorius: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$.

772. Duotas lygiagretainis $ABCD$. Įrodykite, kad $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+$ $+\overrightarrow{XD}$; čia X — bet kuris plokštumos taškas.

773. Įrodykite: kad ir kokie būtų vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$, teisinga nelygybė $|\vec{x}-\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$. Kuriuo atveju $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$?

774. Parašiutininkas leidžiasi 3 m/s greičiu. Vėjo gūsis jį stumia į šalį $3\sqrt{3}$ m/s greičiu. Kokį kampą su vertikale sudaro leisdamasis parašiutininkas?

§ 3. VEKTORIAUS DAUGYBA IŠ SKAIČIAUS. VEKTORIŲ TAIKYMAS SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

83. **Vektoriaus ir skaičiaus sandauga.** *Nenulinio vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus k sandauga vadinamas vektorius $\vec{b}$, kurio ilgis lygus $|k| \cdot |\vec{a}|$; vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai, kai $k \geqslant 0$, priešpriešiai,* kai $k<0$. *Nulinio vektoriaus ir bet kokio skaičiaus sandauga laikomas nulinis vektorius.*

Vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus k sandauga žymima šitaip: $k\vec{a}$. 260 paveiksle pavaizduoti vektoriai $\vec{a}$ ir $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $\sqrt{2}\,\vec{a}$.

Iš vektoriaus ir skaičiaus sandaugos apibrėžimo tiesiog išplaukia, kad: 1) *bet kokio vektoriaus ir nulio sandauga yra nulinis vektorius;* 2) *kad ir kokie būtų skaičius k ir vektorius $\vec{a}$, vektoriai $\vec{a}$ ir $k\vec{a}$ kolinearūs.*

Vektoriaus ir skaičiaus daugybai būdingos šitokios pagrindinės savybės.

Kad ir kokie būtų skaičiai k, l ir vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, teisingos lygybės:

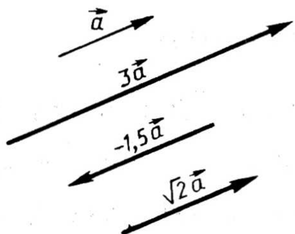
1°. $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ *(jungimo dėsnis);*

2°. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ *(pirmasis skirstymo dėsnis);*

3°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ *(antrasis skirstymo dėsnis).*

261 paveikslas paaiškina jungimo dėsnį. Tame paveiksle pavaizduotas atvejis, kai $k=2$, $l=3$.

262 paveikslas paaiškina pirmąjį skirstymo dėsnį. Tame paveiksle pavaizduotas atvejis, kai $k=3$, $l=2$.

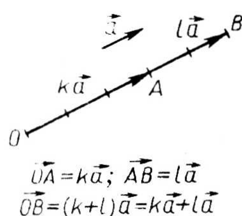


260 pav.

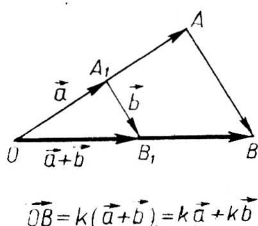


$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}=2(3\vec{a})$
$\overrightarrow{OB}=6\vec{a}=(2\cdot 3)\vec{a}$

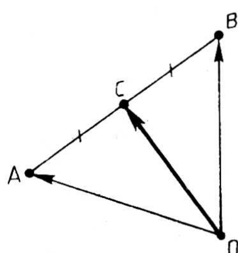
261 pav.



262 pav.



263 pav.



264 pav.

263 paveikslas paaiškina antrąjį skirstymo dėsnį. Tame paveiksle trikampiai OAB ir OA_1B_1 panašūs, panašumo koeficientas k, todėl $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})$. Antra vertus, $\overrightarrow{OB}=$ $=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=k\vec{a}+k\vec{b}$. Taigi

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}.$$

P a s t a b a. Remiantis išnagrinėtomis vektorių veiksmų savybėmis, reiškinius, į kuriuos įeina vektorių sumos ir skirtumai bei vektorių ir skaičių sandaugos, galima pertvarkyti laikantis tų pačių taisyklių, kaip ir pertvarkant skaitinius reiškinius. Pavyzdžiui, reiškinį $\vec{p}=2(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{c}+\vec{a})-3(\vec{b}-\vec{c}+\vec{a})$ galima pertvarkyti šitaip: $\vec{p}=2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{c}-3\vec{a}=-5\vec{b}+4\vec{c}$.

84. Vektorių taikymas sprendžiant uždavinius. Vektorius galima taikyti sprendžiant geometrijos uždavinius ir įrodant teoremas. Pateiksime pavyzdžių. Iš pradžių išnagrinėsime pagalbinį uždavinį.

1 u ž d a v i n y s. *Taškas C — atkarpos AB vidurys, O — bet kuris plokštumos taškas* (264 pav.). *Reikia įrodyti, kad*

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

S p r e n d i m a s. Remiantis trikampio taisykle, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$. Tas lygybes sudėję gauname: $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$. Kadangi taškas C — atkarpos AB vidurys, tai $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Vadinasi, $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, arba $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OB})$.

2 uždavinys. *Reikia įrodyti, kad tiesė, nubrėžta per trapecijos pagrindų vidurio taškus, eina per šoninių kraštinių tęsinių susikirtimo tašką.*

Sprendimas. Sakykime, $ABCD$ — trapecija, M ir N — pagrindų BC ir AD vidurio taškai, O — tiesių AB ir CD susikirtimo taškas (265 pav.). Įrodysime, kad taškas O yra tiesėje MN.

Trikampiai OAD ir OBC panašūs remiantis pirmuoju trikampių panašumo požymiu (paaiškinkite, kodėl), todėl $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}=k$. Kadangi $\overrightarrow{OB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OD}$, tai

$$\overrightarrow{OA}=k\cdot\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD}=k\cdot\overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Taškas M — atkarpos BC vidurys, todėl $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. Panašiai $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$. Į šią lygybę įrašę vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OD}$ (1) išraiškas gauname:

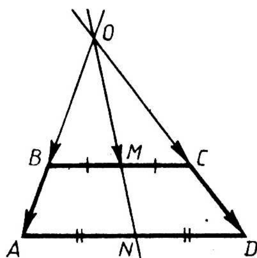
$$\overrightarrow{ON}=k\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=k\cdot\overrightarrow{OM}.$$

Iš čia išplaukia, kad vektoriai $\overrightarrow{ON}$ ir $\overrightarrow{OM}$ kolinearūs. Vadinasi, taškas O yra tiesėje MN.

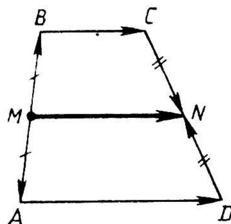
85. Trapecijos vidurinė linija. *Trapècijos vidurinė lìnija* vadinama atkarpa, jungianti jos šoninių kraštinių vidurio taškus. Įrodysime trapecijos vidurinės linijos teoremą.

Teorema. ***Trapecijos vidurinė linija lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.***

Įrodymas. Sakykime, MN — trapecijos $ABCD$ vidurinė linija (266 pav.). Įrodysime, kad $MN \parallel AD$ ir $MN=\frac{AD+BC}{2}$.



265 pav.



266 pav.

Remiantis daugiakampio taisykle, $\vec{MN}=\vec{MB}+\vec{BC}+\vec{CN}$ ir $\vec{MN}=$ $=\vec{MA}+\vec{AD}+\vec{DN}$. Tas lygybes sudėję gauname:

$$2\vec{MN}=(\vec{MB}+\vec{MA})+(\vec{BC}+\vec{AD})+(\vec{CN}+\vec{DN}).$$

Tačiau M ir N — kraštinių AB ir CD vidurio taškai; todėl $\vec{MB}+$ $+\vec{MA}=\vec{0}$ ir $\vec{CN}+\vec{DN}=\vec{0}$. Vadinasi, $2\vec{MN}=\vec{AD}+\vec{BC}$. Iš čia $\vec{MN}=$ $=\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{BC})$. Kadangi vektoriai $\vec{AD}$ ir $\vec{BC}$ vienakrypčiai, tai vektoriai $\vec{MN}$ ir $\vec{AD}$ irgi vienakrypčiai, o vektoriaus $(\vec{AD}+\vec{BC})$ ilgis lygus $AD+BC$. Iš čia išplaukia, kad $MN \parallel AD$ ir $MN=$ $=\frac{AD+BC}{2}$. Teorema įrodyta.

Praktikos darbai

775. Nubrėžkite nekolinearius vektorius $\vec{p}$ ir $\vec{q}$, kurių pradžios nesutampa, pažymėkite kurį nors tašką O. Nuo taško O atidėkite vektorius, lygius $2\vec{p}$ ir $\frac{1}{2}\vec{q}$.

776. Nubrėžkite nekolinearius vektorius $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ ir vektorius: a) $\vec{x}+2\vec{y}$; b) $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$; c) $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; d) $1\frac{1}{2}\vec{x}-3\vec{y}$; e) $0\vec{x}+$ $+3\vec{y}$; f) $-2\vec{x}+0\vec{y}$. Užduotis a)—f) atlikite tuo atveju, kai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ — nenuliniai kolinearūs vektoriai.

777. Nubrėžkite nekolinearius vektorius $\vec{p}$ ir $\vec{q}$, kurių pradžios nesutampa. Nubrėžkite vektorius $\vec{m}=2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{l}=-2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{s}=\frac{2}{3}\vec{q}-\vec{p}$.

778. Nubrėžkite paporiui nekolinearius vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$. Nubrėžkite vektorius: a) $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$; b) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

779. Duotas vektorius $\vec{p}=3\vec{a}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$. Nurodykite, kaip nukreiptas kiekvienas vektorių $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ vektoriaus $\vec{p}$ atžvilgiu ir jų ilgius išreikškite vektoriaus $\vec{p}$ ilgiu $|\vec{p}|$.

780. Kad ir koks būtų vektorius $\vec{a}$, teisingos lygybės: a) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; b) $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$. Įrodykite.

781. Sakykime, $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$. Vektoriais $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ išreikškite vektorius: a) $2\vec{x}-2\vec{y}$; b) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; c) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

782. E ir G — lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AD ir BC vidurio taškai. Vektorius $\overrightarrow{EC}$ ir $\overrightarrow{AG}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

783. Taškas M yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje BC, $BM:MC=3:1$. Vektorius $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{MD}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

784. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O, M — kraštinės AD taškas, $AM=\frac{1}{2}MD$. Vektoriais $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$ ir $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ išreikškite vektorius: a) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$; b) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$.

785. M ir N — keturkampio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD vidurio taškai. Įrodykite, kad $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$.

786. Atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1 — trikampio ABC pusiaukraštinės. Vektorius $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

787. Taškas O — trikampio DEF pusiaukraštinės EG vidurys. Vektorių $\overrightarrow{DO}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$.

788. Duotas bet koks trikampis ABC. Įrodykite, kad yra trikampis, kurio kraštinės lygiagrečios ir lygios trikampio ABC pusiaukraštinėms.

Sprendimas. Sakykime, AA_1, BB_1, CC_1 — trikampio ABC pusiaukraštinės. Tada $\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$, $\vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{BA})$, $\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{CB})$ (žr. 84 skyrelio 1 uždavinį).

Tas lygybes sudėję, gauname $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1} = \frac{1}{2}((\vec{AB}+\vec{BA})+(\vec{AC}+\vec{CA})+(\vec{CB}+\vec{BC})) = \vec{0}$.

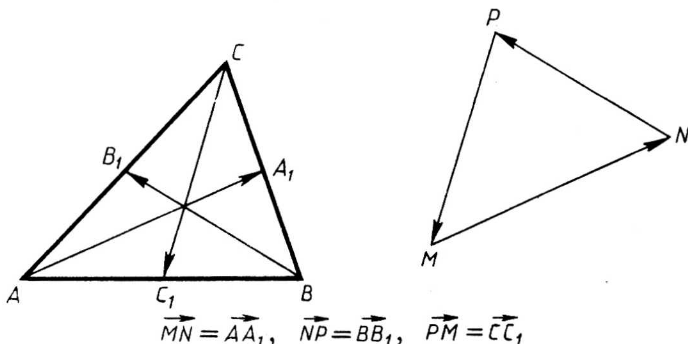
Iš čia išplaukia, kad pagal daugiakampio taisyklę (81 skyrelis), nubrėžę vektorių $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ sumą, gausime uždavinio sąlygas tenkinantį trikampį (267 paveiksle trikampį MNP).

789. Trikampio ABC kraštinės yra lygiagretainių ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1 kraštinės. Įrodykite, kad yra trikampis, kurio kraštinės lygiagrečios ir lygios atkarpoms A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

790. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus, lygiagreti jos pagrindams ir lygi pagrindų skirtumo pusei.

791. Įrodykite, kad atkarpos, jungiančios bet kokio keturkampio priešingų kraštinių vidurio taškus, susikirsdamos viena kitą dalija pusiau.

792. Įrodykite trikampio vidurinės linijos teoremą (62 skyrelis).



267 pav.

793. Trapecijos šoninės kraštinės lygios 13 cm ir 15 cm, o perimetras lygus 48 cm. Raskite trapecijos vidurinę liniją.

794. Trikampio ABC kraštinė AB padalyta į keturias lygias dalis, per dalijimo taškus nubrėžtos tiesės, lygiagrečios kraštinei BC. Trikampio kraštinės AB ir AC tose lygiagrečiose tiesėse iškerta tris atkarpas, kurių mažiausioji lygi 3,4. Raskite kitas dvi atkarpas.

795. Apskritimo skersmens galai nuo apskritimo liestinės nutolę 18 cm ir 12 cm. Apskaičiuokite apskritimo skersmenį.

796. Iš apskritimo skersmens CD galų nuleisti statmenys CC_1 ir DD_1 į liestinę, nestatmeną skersmeniui CD; $CC_1=11$ cm, $CD=27$ cm. Raskite DD_1.

797. Įrodykite, kad trapecijos vidurinė linija eina per įstrižainių vidurio taškus.

798. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė lygi 48 cm, įstrižainė vidurinę liniją dalija į 11 cm ir 35 cm atkarpas. Raskite trapecijos kampus.

799. Duota lygiašonė trapecija $ABCD$. Statmuo, nuleistas iš viršūnės B į didesnįjį pagrindą AD, tą pagrindą dalija į dvi atkarpas, kurių ilgesnioji lygi 7 cm. Raskite trapecijos vidurinę liniją.

IX SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Pateikite iš fizikos kurso žinomų vektorinių dydžių pavyzdžių.
2. Pasakykite vektoriaus apibrėžimą. Paaiškinkite, koks vektorius vadinamas nuliniu.
3. Ką vadiname nenulinio vektoriaus ilgiu? Koks nulinio vektoriaus ilgis?
4. Kokie vektoriai vadinami kolineariais? Paveiksle pavaizduokite vienakrypčius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ bei priešpriešius vektorius $\vec{c}$ ir $\vec{d}$.
5. Pasakykite lygių vektorių apibrėžimą.
6. Paaiškinkite pasakymo „Vektorius $\vec{a}$ atidėtas nuo taško A" prasmę. Įrodykite, kad nuo kiekvieno taško galima atidėti duotam vektoriui lygų vektorių, tačiau tik vieną.

7. Paaiškinkite, koks vektorius vadinamas dviejų vektorių suma. Kokia dviejų vektorių sudėties trikampio taisyklės prasmė?
8. Įrodykite, kad su kiekvienu vektoriumi $\vec{a}$ teisinga lygybė $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
9. Suformuluokite ir įrodykite vektorių sudėties dėsnių teoremą.
10. Kokia dviejų nekolinearių vektorių sudėties lygiagretainio taisyklės prasmė?
11. Kokia kelių vektorių sudėties daugiakampio taisyklės prasmė?
12. Koks vektorius vadinamas dviejų vektorių skirtumu? Raskite dviejų duotų vektorių skirtumą.
13. Koks vektorius vadinamas duotam vektoriui priešingu vektoriumi? Suformuluokite ir įrodykite vektorių skirtumo teoremą.
14. Koks vektorius vadinamas vektoriaus ir skaičiaus sandauga?
15. Kokia sandauga $k\vec{a}$, kai: a) $\vec{a}=\vec{0}$; b) $k=0$?
16. Ar vektoriai $\vec{a}$ ir $k\vec{a}$ gali būti nekolinearūs?
17. Suformuluokite vektoriaus daugybos iš skaičiaus pagrindines savybes.
18. Pateikite vektorių taikymo sprendžiant geometrijos uždavinius pavyzdį.
19. Kokia atkarpa vadinama trapecijos vidurine linija?
20. Suformuluokite ir įrodykite trapecijos vidurinės linijos teoremą.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

800. Įrodykite: jei vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ vienakrypčiai, tai $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|+|\vec{n}|$, o jei $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ priešpriešiai ir $|\vec{m}|\geqslant|\vec{n}|$, tai $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|-|\vec{n}|$.

801. Įrodykite: kad ir kokie būtų vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$, teisingos nelygybės $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leqslant|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

802. Trikampio ABC kraštinėje BC pažymėtas taškas N; $BN=2NC$. Vektorių $\overrightarrow{AN}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

803. Trikampio MNP kraštinėse MN ir NP pažymėti taškai X ir Y; $\frac{MX}{XN}=\frac{3}{2}$ ir $\frac{NY}{YP}=\frac{3}{2}$. Vektorius $\vec{XY}$ ir $\vec{MP}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\vec{NM}$ ir $\vec{b}=\vec{NP}$.

804. Trapecijos $ABCD$ pagrindas AD tris kartus didesnis už pagrindą BC. Kraštinėje AD pažymėtas taškas K; $AK=\frac{1}{3}AD$. Vektorius $\vec{CK}$, $\vec{KD}$ ir $\vec{BC}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\vec{BA}$ ir $\vec{b}=\vec{CD}$.

805. Duoti trys taškai: A, B ir C; $\vec{BC}=\frac{1}{2}\vec{AB}$. Įrodykite, kad $\vec{OB}=\frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OC}$.

806. Taškas C atkarpą AB dalija santykiu $m:n$, pradedant nuo taško A; O — bet kuris taškas. Įrodykite, kad teisinga lygybė $\vec{OC}=\frac{n}{m+n}\vec{OA}+\frac{m}{m+n}\vec{OB}$.

807. Sakykime, AA_1, BB_1 ir CC_1 — trikampio ABC pusiaukraštinės, O — bet kuris taškas. Įrodykite, kad $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}$.

808*. A ir C — bet kokio keturkampio priešingų kraštinių vidurio taškai, B ir D — kitų dviejų kraštinių vidurio taškai, O — bet kuris taškas. Įrodykite, kad $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$.

809. Stačiosios trapecijos vienas kampas lygus 120°, mažesnioji įstrižainė ir didesnioji šoninė kraštinė lygios a. Raskite trapecijos vidurinę liniją.

810. Kampo, kurį sudaro prie trapecijos šoninės kraštinės esančių kampų pusiaukampinės, viršūnė yra tiesėje, einančioje per trapecijos vidurinę liniją. Įrodykite.

SUNKESNI UŽDAVINIAI

V skyriaus uždaviniai

811. Iškilojo šešiakampio $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ visi kampai lygūs. Įrodykite, kad $A_1A_2-A_4A_5=A_5A_6-A_2A_3=A_3A_4-A_6A_1$.

812. Teigiamieji skaičiai a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ir a_6 tenkina sąlygas $a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$. Įrodykite, kad yra iškilasis šešia-

kampis $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, kurio visi. kampai lygūs, o $A_1A_2=a_1$, $A_2A_3=a_2$, $A_3A_4=a_3$, $A_4A_5=a_4$, $A_5A_6=a_5$, $A_6A_1=a_6$.

813. Įrodykite, kad iš bet kurio iškilojo keturkampio formos vienodų plytelių galima sudėti parketą.

814. Įrodykite, kad iškilojo keturkampio įstrižainės susikerta.

815. Įrodykite, kad bet kurio keturkampio dvi priešingosios viršūnės yra skirtingose pusėse nuo tiesės, einančios per kitas dvi viršūnes.

816. Nubrėžta lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas AC, pusiaukampinė AD. Tiesė, einanti per tašką D ir statmena AD, tiesę AC kerta taške E. Taškai M ir K — statmenų, nuleistų iš taškų B ir D į tiesę AC, pagrindai. Raskite MK, kai $AE=a$.

817. Įrodykite, kad trikampio trijų pusiaukraštinių suma mažesnė už trikampio perimetrą, bet didesnė už pusę perimetro.

818. Iškilojo keturkampio įstrižainės jį dalija į keturis trikampius, kurių perimetrai lygūs. Įrodykite, kad tas keturkampis — rombas.

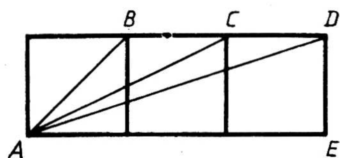
819. Tiesė neina per tašką. Raskite visų atkarpų, jungiančių tą tašką su visais minėtos tiesės taškais, vidurio taškų aibę.

820. Įrodykite, kad tiesė, einanti per lygiašonės trapecijos pagrindų vidurio taškus, statmena pagrindams. Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinį teiginį.

821. Susikirtus stačiakampio visų kampų pusiaukampinėms, gautas keturkampis. Įrodykite, kad tas keturkampis — kvadratas.

822. Lygiagretainio išorėje nubraižyti kvadratai, kurių kiekvieno viena kraštinė yra lygiagretainio kraštinė. Įrodykite, kad tų kvadratų įstrižainių susikirtimo taškai yra kvadrato viršūnės.

823. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje CD pažymėtas taškas M. Kampo BAM pusiaukampinė kraštinę BC kerta taške K. Įrodykite, kad $AM=BK+DM$.



268 pav.

824. 268 paveiksle pavaizduoti trys kvadratai. Raskite sumą $\angle BAE+ +\angle CAE+\angle DAE$.

825. Kvadrato $ABCD$ viduje pažymėtas taškas M; $\angle MAB=60°$, $\angle MCD= =15°$. Raskite $\angle MBC$.

826. Trikampio ABC išorėje nubraižyti kvadratai $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, po to lygiagretainiai $TCDQ$ ir $EBKP$. Įrodykite, kad trikampis APQ statusis ir lygiašonis.

827. Nubraižykite lygiašonę trapeciją, kai duoti pagrindai ir įstrižainės.

828. Jei trikampis turi: a) simetrijos ašį, tai jis lygiašonis; b) daugiau nei vieną simetrijos ašį, tai jis lygiakraštis. Įrodykite.

VI skyriaus uždaviniai

829. Per lygiagretainio $ABCD$ vidaus tašką M nubrėžtos jo kraštinėms lygiagrečios tiesės. Jos kraštines AB, BC, CD ir DA kerta taškuose P, Q, R ir T. Įrodykite: jei taškas M yra įstrižainėje AC, tai lygiagretainių $MPBQ$ ir $MRDT$ plotai lygūs ir, atvirkščiai, jei lygiagretainių $MPBQ$ ir $MRDT$ plotai lygūs, tai taškas M yra įstrižainėje AC.

830. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti taškai M ir K. Atkarpos AK ir BM susikerta taške O. Trikampių OMA, OAB ir OBK plotai lygūs S_1, S_2 ir S_3. Raskite trikampio CMK plotą.

831. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti taškai M ir K, o atkarpoje MK — taškas P; $\frac{AM}{MC}=\frac{CK}{KB}=\frac{MP}{PK}$. Trikampių AMP ir BKP plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite trikampio ABC plotą.

832. P, Q, R ir T — lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškai. Įrodykite, kad, susikirtus tiesėms AQ, BR, CT ir DP, gaunamas lygiagretainis. Raskite jo ploto ir lygiagretainio $ABCD$ ploto santykį.

833. Įrodykite, kad trapecijos plotas lygus šoninės kraštinės ir statmens, nuleisto iš kitos šoninės kraštinės vidurio į tiesę, kurioje yra pirmoji šoninė kraštinė, sandaugai.

834. Trapecijos $ABCD$, kurios pagrindai BC ir AD, įstrižainės susikerta taške O. Trikampių BOC ir AOD plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite trapecijos plotą.

835. Per trapecijos mažesniojo pagrindo galus nubrėžtos dvi lygiagrečios tiesės, kertančios didesnįjį pagrindą. Trapecijos įstrižainės ir tos tiesės trapeciją dalija į septynis trikampius ir penkiakampį. Įrodykite, kad penkiakampio plotas lygus trijų trikampių, esančių prie šoninių kraštinių ir mažesniojo pagrindo, plotų sumai.

836. Tiesė, einanti per keturkampio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD vidurio taškus, kraštines AB ir CD kerta taškuose M ir K. Įrodykite, kad trikampių DCM ir AKB plotai lygūs.

837. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinė AB pratęsta nuo taško B iki taško E, o kraštinė AD — nuo taško D iki taško K. Tiesės ED ir KB susikerta taške O. Įrodykite, kad keturkampių $ABOD$ ir $CEOK$ plotai lygūs.

838. Dvi nesusikertančios atkarpos kiekvieną iš dviejų priešingų iškilojo keturkampio kraštinių dalija į tris lygias dalis. Įrodykite, kad tarp tų atkarpų esančios keturkampio dalies plotas tris kartus mažesnis už viso keturkampio plotą.

839. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinių AB ir DC vidurio taškus K ir M ir viršūnes jungia atkarpos KD, KC, MA ir MB. Įrodykite, kad tarp tų atkarpų esančio keturkampio plotas lygus trikampių, esančių prie kraštinių AD ir BC, plotų sumai.

840. Taškas A yra $60°$ kampo viduje. Atstumai nuo taško A iki kampo kraštinių lygūs a ir b. Raskite atstumą nuo taško A iki kampo viršūnės.

841. Tiesė, einanti per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę C, tieses AB ir AD kerta taškuose K ir M. Trikampių KBC ir CDM plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite lygiagretainio plotą.

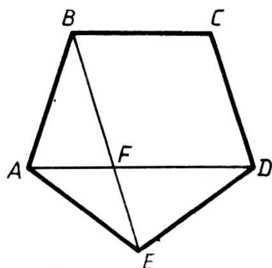
842. Per keturkampio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė; atkarpą AB ji kerta taške M, o atkarpą CD — taške K. Tiesė, einanti per tašką K ir lygiagreti AB, tiesę BD kerta taške T, o tiesė, einanti per tašką M ir lygiagreti CD, tiesę AC kerta taške E. Įrodykite, kad tiesės BE ir CT lygiagrečios.

843. Trikampio ABC kraštinė AB pratęsta nuo taško A iki taško D; atkarpa AD lygi atkarpai AC. Spinduliuose BA ir BC pažymėti taškai K ir M; trikampių BDM ir BCK plotai lygūs. Raskite kampą BKM, kai $\angle BAC=\alpha$.

844. Stačiakampio $ABCD$ viduje pažymėtas taškas M; $MB=a$, $MC=b$ ir $MD=c$. Raskite MA.

845. Nubrėžta trikampio ABC aukštinė BD. Atkarpa KA statmena AB ir lygi DC, atkarpa CM statmena BC ir lygi AD. Įrodykite, kad atkarpos MB ir KB lygios.

846. Taškas O — stačiojo trikampio ABC, kurio statusis kampas C, vidaus taškas; $S_{OAB}=S_{OAC}=S_{OBC}$. Įrodykite, kad $OA^2+OB^2=5OC^2$.



269 pav.

847. 269 paveiksle pavaizduotas taisyklingasis penkiakampis $ABCDE$, t. y. iškilasis penkiakampis, kurio visi kampai lygūs ir visos kraštinės lygios. Įrodykite, kad: a) $\triangle AED \sim \triangle AFE$; b) $\frac{DA}{DF} = \frac{DF}{AF}$.

848. Per trikampio ABC ($AB \neq AC$) kraštinės BC vidurį M nubrėžta tiesė, lygiagreti kampo A pusiaukampinei; tieses AB ir AC ji kerta taškuose D ir E. Įrodykite, kad $BD = CE$.

849. Įrodykite, kad ãtkarpos, jungiančios smailiojo trikampio aukštinių pagrindus, sudaro trikampį, kurio pusiaukampinės yra tos aukštinės.

850. Taškai E ir F yra trikampio ABC kraštinėje AB; be to, taškas E yra atkarpoje AF ir $AE = BF$. Tiesė, nubrėžta per tašką E ir lygiagreti kraštinei AC, ir tiesė, nubrėžta per tašką F ir lygiagreti kraštinei BC, kertasi taške K. Įrodykite, kad taškas K yra trikampio ABC pusiaukraštinėje, nubrėžtoje į kraštinę AB.

851. Stačiojo trikampio įžambinė yra jo nekertančio kvadrato kraštinė. Trikampio statinių suma lygi a. Raskite atstumą nuo kvadrato įstrižainių susikirtimo taško iki stačiojo kampo viršūnės.

852. Trikampio ABC $\angle A = \frac{180°}{7}$ ir $\angle B = \frac{360°}{7}$. Įrodykite, kad $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

853. Iš kampo AOB vidaus taško M nuleisti statmenys MP ir MQ į jo kraštines OA ir OB. Iš taškų P ir Q nuleisti statmenys PR ir QS į OB ir OA. Įrodykite, kad $RS \perp OM$.

854. Iš lygiašonio trikampio ABC pagrindo AC vidurio D nuleistas statmuo DH į kraštinę BC, M — atkarpos DH vidurys. Įrodykite, kad $BM \perp AH$.

855. Iš stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo viršūnės C nuleistas statmuo CD į įžambinę, o iš taško D — statmenys DE ir DF į statinius AC ir BC. Įrodykite, kad: a) $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$; b) $AE^2 + BF^2 + 3CD^2 = AB^2$; c) $\sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2} = \sqrt[3]{AB^2}$.

856. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške P; $\angle ADP = \frac{1}{2} \angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3} \angle PAD$ ir $AD = BD = CD$. a) Raskite visus keturkampio kampus. 2) Įrodykite, kad $AB^2 = BP \cdot BD$.

857. Taškas M nėra tose tiesėse, kuriose yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinės. Įrodykite, kad yra taškai N, P ir Q, jog A, B, C ir D — atkarpų MN, NP, PQ ir QM vidurio taškai.

858. Įrodykite: jei iškilojo keturkampio priešingos kraštinės nelygiagrečios, tai jų sumos pusė didesnė už atkarpą, jungiančią kitų dviejų priešingų kraštinių vidurio taškus.

859. Įrodykite: jei atstumų tarp iškilojo keturkampio priešingų kraštinių vidurio taškų suma lygi pusei jo perimetro, tai tas keturkampis — lygiagretainis.

860. Įrodykite: jei atkarpa, jungianti iškilojo keturkampio dviejų priešingų kraštinių vidurio taškus, lygi kitų dviejų kraštinių sumos pusei, tai tas keturkampis — trapecija arba lygiagretainis.

861. Trapecijos $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O; AB — trapecijos mažesnysis pagrindas, trikampis ABO — lygiakraštis. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės yra atkarpų OA, OD ir BC vidurio taškai,— lygiakraštis.

862. Iš trikampio ABC viršūnės A nuleisti statmenys AM ir AK į to trikampio priekampių, kurių viršūnės B ir C, pusiaukampines. Įrodykite, kad atkarpa MK lygi pusei trikampio ABC perimetro.

863. Atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 jungia trikampio ABC viršūnes su prieš jas esančių kraštinių vidaus taškais. Įrodykite, kad tų atkarpų vidurio taškai nėra vienoje tiesėje.

864. Trikampio visų trijų aukštinių vidurio taškai yra vienoje tiesėje. Įrodykite, kad tas trikampis statusis.

865. Trikampio ABC kraštinė AC du kartus didesnė už kraštinę BC. Nubrėžta pusiaukampinė CM ir priekampio, kurio viršūnė C, pusiaukampinė; ji tiesę AB kerta taške K. Įrodykite, kad $S_{BCM} = \frac{1}{2} S_{ACM} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{CMK}$.

866. Trikampio EFG kraštinės lygios trikampio ABC pusiaukraštinėms. Įrodykite, kad $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

867. Per trikampio ABC viršūnę A eina tiesė, kuri pusiaukraštinę BM dalija santykiu 1 : 2, pradedant nuo viršūnės, o kraš-

tinę BC kerta taške K. Raskite trikampių ABK ir ABC plotų santykį.

868. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę A nubrėžta tiesė; ji tieses BD, CD ir BC kerta taškuose M, N ir P. Įrodykite, kad atkarpa AM yra atkarpų MN ir MP geometrinis vidurkis.

869. Raskite lygiašonės trapecijos didesniojo pagrindo tašką, kuris nuo vienos šoninės kraštinės būtų n kartų toliau nei nuo kitos ($n=2$, 3, 4).

870. Taškas C yra atkarpoje AB. Raskite tiesės AB tašką D, nesantį atkarpoje AB, kad būtų teisinga lygybė $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$. Ar visada uždavinys turi sprendinį?

871. Nubraižykite lygiašonį trikampį, kai duota pagrindo ir į jį nuleistos aukštinės suma ir kampas tarp šoninių kraštinių.

872. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir kampo tarp jų pusiaukampinė.

873. Nubraižykite trikampį ABC, kai duoti $\angle A$, $\angle C$ bei atkarpa, lygi kraštinės AC ir aukštinės BH sumai.

874. Nubraižykite trikampį, kai duotos visos trys aukštinės.

875. Nubraižykite trapeciją, kai duota šoninė kraštinė, didesnysis pagrindas, kampas tarp jų ir kitų dviejų kraštinių santykis.

876. Nubraižykite rombą, kurio plotas būtų lygus duoto kvadrato plotui ir įstrižainių santykis būtų lygus duotų atkarpų santykiui.

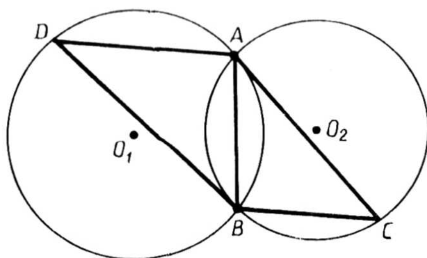
VIII skyriaus uždaviniai

877. Du apskritimai turi vienintelį bendrą tašką M. Per tą tašką nubrėžtos dvi kirstinės, kurios vieną apskritimą kerta taškuose A ir A_1, kitą — taškuose B ir B_1. Įrodykite, kad $AA_1 \parallel BB_1$.

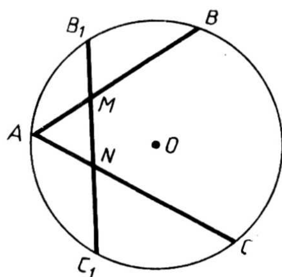
878. Tiesė AC — apskritimo, kurio centras O_1, liestinė, tiesė BD — apskritimo, kurio centras O_2, liestinė (270 pav.). Įrodykite, kad: a) $AD \parallel BC$; b) $AB^2=AD \cdot BC$; c) $BD^2 : AC^2=AD : BC$.

879. B_1 ir C_1 — lankų AB ir AC vidurio taškai (271 pav.). Įrodykite, kad $AM=AN$.

880. Dvi tiesės susikerta ne apskritimo taške. Apskritimas tose tiesėse iškerta lygias stygas. Įrodykite, kad atstumai nuo



270 pav.



271 pav.

tų tiesių susikirtimo taško iki vienos ir kitos stygos galų atitinkamai lygūs.

881. AB — apskritimo styga, AD — atstumas nuo taško A iki liestinės taške B. Įrodykite, kad visų stygų AB santykio $\frac{AB^2}{AD}$ reikšmė ta pati.

882. Per dviejų apskritimų, kurių centrai O_1 ir O_2, susikirtimo tašką A nubrėžta tiesė. Ji vieną apskritimą kerta taške B, kitą — taške C. Įrodykite, kad didžiausią atkarpą BC gausime tada, kai ji bus lygiagreti atkarpai O_1O_2.

883. Atkarpa AB yra apskritimo, kurio centras O, skersmuo. Kiekviename apskritimo spindulyje OM nuo centro O atidėta atkarpa, lygi atstumui nuo to spindulio galo M iki tiesės AB. Raskite tų atkarpų galų aibę.

884. Lygiakraščio trikampio ABC viduje pažymėtas taškas M; $\angle BMC=30°$, $\angle BMA=17°$. Raskite kampus BAM ir BCM.

885. Per trikampio ABC kiekvieną viršūnę nubrėžta tiesė, statmena trikampio kampo prie tos viršūnės pusiaukampinei. Tos tiesės susikirsdamos sudaro naują trikampį. Įrodykite, kad to trikampio viršūnės yra tose pačiose tiesėse, kaip ir trikampio ABC pusiaukampinės.

886. Tiesės, kuriose yra trikampio ABC aukštinės, susikerta taške H, o A', B', C' — taškai, simetriški taškui H tiesių BC, CA, AB atžvilgiu. Įrodykite, kad taškai A', B', C' yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo taškai.

887. Atkarpa BD — trikampio ABC pusiaukampinė. Įrodykite, kad $BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$.

888. Iš trikampio ABC viršūnės B nuleista aukštinė BH ir nubrėžta kampo B pusiaukampinė. Ji taške E kerta apie tri-

kampį apibrėžtą apskritimą; to apskritimo centras O. Įrodykite, kad spindulys BE yra kampo OBH pusiaukampinė.

889. Apie lygiakraštį trikampį ABC apibrėžto apskritimo bet kuris taškas X atkarpomis sujungtas su trikampio viršūnėmis. Įrodykite, kad viena atkarpų AX, BX ir CX lygi kitų dviejų atkarpų sumai.

890. Įrodykite: jei įbrėžtinio keturkampio įstrižainės statmenos, tai keturkampio priešingų kraštinių kvadratų suma lygi apibrėžtinio apskritimo skersmens kvadratui.

891. Į apskritimą įbrėžto keturkampio $ABCD$ kampų A ir B pusiaukampinės susikerta kraštinės CD taške. Įrodykite, kad $CD=BC+AD$.

892. Įrodykite, kad apie apskritimą apibrėžtos stačiosios trapecijos plotas lygus jos pagrindų sandaugai.

893. Įrodykite, kad bet kokio į apskritimą įbrėžto keturkampio įstrižainių sandauga lygi priešingų kraštinių sandaugų sumai (Ptolemėjo teorema).

894. Įrodykite, kad apie bet kokį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį R, į jį įbrėžto apskritimo spindulį r ir atstumą d tarp tų apskritimų centrų sieja lygybė

$$d^2=R^2-2Rr$$

(Eulerio formulė).

895. Taškas O yra apie nelygiakraštį trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras, H — tiesių, kuriose yra aukštinės AA_1, BB_1, CC_1, susikirtimo taškas, A_2, B_2, C_2 — atkarpų AH, BH, CH vidurio taškai, A_3, B_3, C_3 — trikampio ABC kraštinių vidurio taškai. Įrodykite, kad taškai A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 priklauso vienam apskritimui (Eulerio apskritimas).

896. Įrodykite, kad iš bet kurio apie trikampį apibrėžto apskritimo taško į tieses, kuriose yra trikampio kraštinės, nuleistų statmenų pagrindai yra vienoje tiesėje (Simpsono tiesė).

897. Nubrėžkite dviejų duotų apskritimų bendrą liestinę.

898. Duotas apskritimas, kurio centras O, taškas M bei atkarpos P_1Q_1 ir P_2Q_2. Nubrėžkite tiesę p, kurioje apskritimas iškirstų stygą, lygią P_1Q_1, o atstumas nuo taško M iki tiesės p būtų lygus P_2Q_2.

899. Per apskritimo viduje duotą tašką nubrėžkite stygą, kuri būtų mažiausia iš visų stygų, einančių per tą tašką.

900. Nubraižykite trikampį, kai: a) duota kraštinė, prieš ją esantis kampas ir į tą kraštinę nuleista aukštinė; b) duotas kampas, iš to kampo viršūnės nuleista aukštinė ir perimetras.

901. Nubraižykite trikampį, kai duotas apie jį apibrėžtas apskritimas bei apskritimo taškai H, B ir M, per kuriuos eina tos tiesės, kuriose yra iš vienos viršūnės nubrėžtos aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė.

902. Duoti trys taškai, nesantys vienoje tiesėje. Nubraižykite trikampį, kurio aukštinių pagrindai būtų tie taškai. Kiek sprendinių turi uždavinys?

IX skyriaus uždaviniai

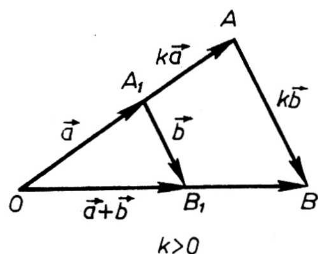
903. Įrodykite vektoriaus daugybos iš skaičiaus pagrindines savybes (83 skyrelis).

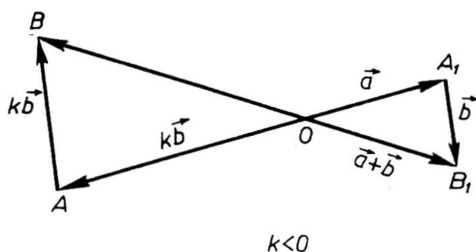
S p r e n d i m a s. 1. Įrodysime, kad ir kokie būtų skaičiai k, l ir vektorius $\vec{a}$, teisinga lygybė $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$. Jei $\vec{a}=\vec{0}$, tai akivaizdu, kad lygybė teisinga. Sakykime, $\vec{a}\neq\vec{0}$. Tada turime:

$$|(kl)\vec{a}|=|kl|\,|\vec{a}|=|k|\,|l|\,|\vec{a}|=|k|\,|l\vec{a}|=|k(l\vec{a})|.$$

Toliau. Jei $kl\geqslant 0$, tai $(kl)\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$ ir $k(l\vec{a})\uparrow\uparrow\vec{a}$; jei $kl<0$, tai $(kl)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ ir $k(l\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{a}$. Abiem atvejais $(kl)\vec{a}\uparrow\uparrow k(l\vec{a})$. Vadinasi, $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$.

2. Įrodysime: kad ir koks būtų skaičius k bei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, teisinga lygybė $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$. Jei $k=0$, tai akivaizdu, kad lygybė teisinga. Sakykime, $k\neq 0$. Išnagrinėkime atvejį, kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs (atvejį, kai $\vec{a}\parallel\vec{b}$, išnagrinėkite savarankiškai). Nuo kurio nors taško O atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, o nuo taškų A_1 ir A — vektorius $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{b}$ ir $\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$ (272 pav., a, b). Trikampiai OA_1B_1 ir OAB panašūs, panašumo koeficientas $|k|$, todėl $\overrightarrow{OB}=$





272 pav.

$=k\vec{OB_1}=k(\vec{a}+\vec{b})$. Antra vertus, $\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}=k\vec{a}+k\vec{b}$. Taigi $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

3. Įrodysime: kad ir kokie būtų skaičiai k, l bei vektorius $\vec{a}$, teisinga lygybė $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$. Jei $k=l=0$, tai akivaizdu, kad lygybė teisinga. Sakykime, bent vienas iš skaičių k, l nelygus nuliui. Kad būtų aiškiau, laikykime, jog $|k|\geqslant|l|$, taigi $k\neq 0$ ir $\left|\frac{l}{k}\right|\leqslant 1$. Išnagrinėkime vektorių $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}$. Aišku, kad $\left(\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}\right)\uparrow\uparrow\vec{a}$. Toliau, $\left|\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}\right|=|\vec{a}|+\frac{l}{k}|\vec{a}|=$ $=\left(1+\frac{l}{k}\right)|\vec{a}|$. Remiantis vektoriaus ir skaičiaus sandaugos apibrėžimu, $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}=\left(1+\frac{l}{k}\right)\vec{a}$. Abi lygybės puses padauginę iš k, gauname $k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$.

904. Duotas keturkampis $MNPQ$ ir taškas O; $\vec{ON}-\vec{OM}=\vec{OP}-\vec{OQ}$. Koks tas keturkampis?

905. Duotas keturkampis $ABCD$ ir taškas O. Taškai E, F, G ir H simetriški taškui O kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškų atžvilgiu. Koks yra keturkampis $EFGH$?

906. Duotas trikampis ABC. Įrodykite, kad vektorius $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ nukreiptas išilgai kampo A pusiaukampinės, o vektorius

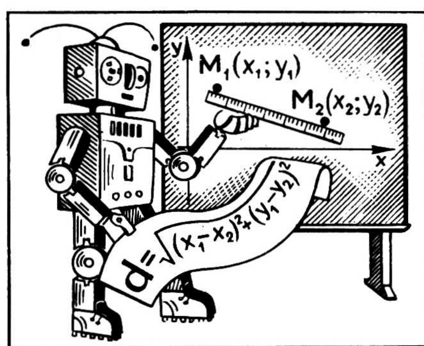
$\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}-\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ — išilgai priekampio, kurio viršūnė A, pusiaukampinės.

907. Įrodykite šitokį teiginį: trys taškai A, B ir C vienai tiesei priklauso tada ir tik tada, kai yra skaičiai k, l ir m, kurių ne visi lygūs nuliui, bet $k+l+m=0$, $k\vec{OA}+l\vec{OB}+m\vec{OC}=\vec{0}$; O — bet kuris taškas.

908. Taikydami vektorius įrodykite, kad keturkampio įstrižainių vidurio taškai ir atkarpų, jungiančių priešingų kraštinių vidurio taškus, susikirtimo taškas yra vienoje tiesėje.

909. Trikampio ABC priekampių, kurių viršūnės A, B ir C, pusiaukampinės tieses BC, CA ir AB kerta taškuose A_1, B_1 ir C_1. Taikydami vektorius įrodykite, kad taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje.

910. Tiesės, kuriose yra nelygiakraščio trikampio ABC aukštinės, susikerta taške H, apie tą trikampį apibrėžto apskritimo centras — O. Taikydami vektorius įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas G priklauso atkarpai HO ir dalija tą atkarpą santykiu $2:1$, t. y. $\frac{HG}{GO}=2$.



X skyrius

KOORDINAČIŲ METODAS

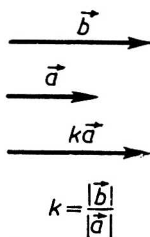
§ 1. VEKTORIAUS KOORDINATĖS

86. Vektoriaus išreiškimas dviem nekolineariais vektoriais. Iš pradžių įrodysime kolineariųjų vektorių lemą[1].

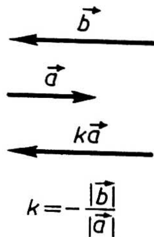
L e m a. *Jei vektoriai* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *kolinearūs ir* $\vec{a} \neq \vec{0}$, *tai* $\vec{b} = k\vec{a}$; k — *tam tikras skaičius.*

Į r o d y m a s. Galimi du atvejai: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ir $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Tuos atvejus išnagrinėsime atskirai.

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Pasirinkime skaičių $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Kadangi $k \geqslant 0$, tai vektoriai $k\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai (273 pav., *a*). Be to, jų ilgiai lygūs: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$. Todėl $\vec{b} = k\vec{a}$.



a)



b)

273 pav.

[1] *Lema* vadinama pagalbinė teorema, kuria remiantis įrodoma kita teorema arba keletas teoremų.

2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Pasirinkime skaičių $k=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Kadangi $k<0$, tai vektoriai $k\vec{a}$ ir $\vec{b}$ irgi vienakrypčiai (273 pav., *b*). Jų ilgiai irgi lygūs: $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Todėl $\vec{b}=k\vec{a}$. Lema įrodyta.

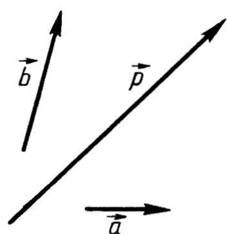
Sakykime, $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ — duoti vektoriai. Jei vektorius $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (čia x ir y — bet kurie skaičiai), tai sakoma, kad *vektorius $\vec{p}$ išreikštas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$*. Skaičiai x ir y vadinami tos *išraiškos koeficientais*. Įrodysime vektoriaus išreiškimo dviem nekolineariais vektoriais teoremą.

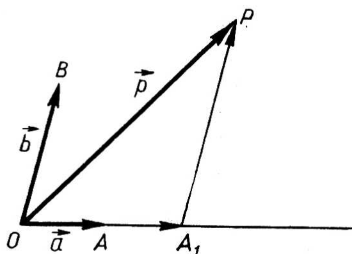
Teorema. ***Kiekvieną vektorių galima išreikšti dviem duotais nekolineariais vektoriais; išraiškos koeficientai nusakomi vienareikšmiškai.***

Įrodymas. Sakykime, $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ — duoti nekolinearūs vektoriai. Iš pradžių įrodysime, kad kiekvieną vektorių $\vec{p}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Galimi du atvejai.

1) Vektorius $\vec{p}$ kolinearus vienam iš vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, pavyzdžiui, vektoriui $\vec{b}$. Šiuo atveju, remiantis kolinearių vektorių lema, vektorių $\vec{p}$ galima išreikšti šitaip: $\vec{p}=y\vec{b}$; čia y — tam tikras skaičius. Tada $\vec{p}=0\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$, t. y. vektorius $\vec{p}$ išreikštas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

2) Vektorius $\vec{p}$ nekolinearus nei vektoriui $\vec{a}$, nei vektoriui $\vec{b}$. Pažymėkime kurį nors tašką O ir nuo jo atidėkime vektorius $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OP}=\vec{p}$ (274 pav.). Per tašką P nubrėžkime tiesę,





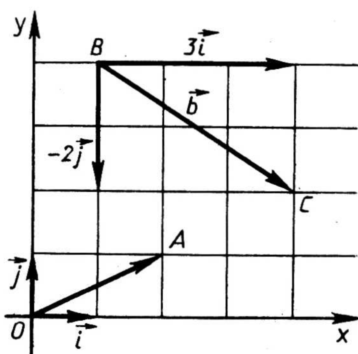
274 pav.

lygiagrečią tiesei OB. Tos tiesės ir tiesės OA susikirtimo tašką pažymėkime A_1. Remiantis trikampio taisykle, $\vec{p}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1P}$. Tačiau vektoriai $\overrightarrow{OA_1}$ ir $\overrightarrow{A_1P}$ kolinearūs atitinkamai vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, todėl $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P}=y\vec{b}$; čia x ir y — tam tikri skaičiai. Vadinasi, $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$, t. y. vektorius $\vec{p}$ išreikštas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

Dabar įrodysime, kad išraiškos koeficientai x ir y nusakomi vienareikšmiškai. Tarkime, kad turime dvi išraiškas: $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ ir $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}$. Antrąją lygybę atėmę iš pirmosios ir pritaikę vektorių veiksmų taisykles gauname $\vec{0}=(x-x_1)\vec{a}+(y-y_1)\vec{b}$. Tokia lygybė teisinga tik tada, kai koeficientai $x-x_1$ ir $y-y_1$ lygūs nuliui. Įsitikinsime. Pavyzdžiui, tarkime, kad $x-x_1\neq 0$. Tada iš gautos lygybės randame $\vec{a}=-\frac{y-y_1}{x-x_1}\vec{b}$, taigi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs. Tačiau tai prieštarauja teoremos sąlygai. Vadinasi, $x-x_1=0$ ir $y-y_1=0$. Iš čia $x=x_1$ ir $y=y_1$. Tai ir reiškia, kad vektoriaus $\vec{p}$ išraiškos koeficientai nusakyti vienareikšmiškai. Teorema įrodyta.

87. Vektoriaus koordinatės. Stačiakampės koordinačių sistemos sąvoka žinoma iš algebros kurso. Priminsime, kad, norint nusakyti stačiakampę koordinačių sistemą, reikia nubrėžti viena kitai statmenas tieses, kiekvienoje jų pasirinkti kryptį (ji žymima rodykle) ir atkarpų matavimo vienetą. Kai atkarpų matavimo vienetas parinktas, kiekvienos atkarpos ilgis išreiškiamas teigiamuoju skaičiumi. Toliau tą skaičių ir laikysime atkarpos ilgiu.

Nuo koordinačių pradžios O atidėkime vienetinius vektorius (t. y. vektorius, kurių kiekvieno ilgis lygus vienetui) $\vec{i}$ ir $\vec{j}$, kurių kryptys šitokios: vektoriaus $\vec{i}$ kryptis sutampa su ašies Ox kryptimi, vektoriaus $\vec{j}$ — su ašies Oy kryptimi (275 pav.). Vektorius $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ vadinsime *koordinãtiniais vèktoriais*.



275 pav.

Koordinatiniai vektoriai nekolinearūs, todėl kiekvieną vektorių $\vec{p}$ galima išreikšti koordinatiniais vektoriais, t. y. $\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ir išraiškos koeficientai (skaičiai x ir y) nusakyti vienareikšmiškai. Vektoriaus $\vec{p}$ išraiškos koordinatiniais vektoriais koeficientai vadinami *vèktoriaus* $\vec{p}$

koordinatėmis turimoje koordinačių sistemoje. Vektoriaus koordinates rašysime riestiniuose skliausteliuose po vektoriaus ženklo: $\vec{p}\{x;\ y\}$. 275 paveiksle $\overrightarrow{AO}\ \{2;\ 1\}$ ir $\vec{b}\{3;\ -2\}$.

Kadangi nulinio vektoriaus išraiška yra $\vec{0}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}$, tai jo koordinatės lygios nuliui: $\vec{0}\{0;\ 0\}$. Jei vektoriai $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ ir $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ lygūs, tai $x_1=x_2$ ir $y_1=y_2$. Taigi *lygių vektorių atitinkamos koordinatės lygios.*

Išnagrinėsime vektorių sumos, skirtumo bei vektoriaus ir skaičiaus sandaugos koordinačių radimo taisykles, kai žinomos vektorių koordinatės.

1⁰. *Kiekviena dviejų ar daugiau vektorių sumos koordinatė lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sumai.*

Teiginį įrodysime dviejų vektorių atveju. Išnagrinėkime vektorius $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$. Kadangi $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$, tai, remdamiesi vektorių sudėties ir vektoriaus daugybos iš skaičiaus savybėmis, gauname:

$$\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}.$$

Iš čia išplaukia, kad vektoriaus $\vec{a}+\vec{b}$ koordinatės yra $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$.

Panašiai įrodomas šitoks teiginys.

2⁰. *Kiekviena dviejų vektorių skirtumo koordinatė lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių skirtumui.*

Kitais žodžiais, jei $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, tai vektoriaus $\vec{a}-\vec{b}$ koordinatės yra $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$. Įrodykite savarankiškai.

3⁰. *Vektoriaus ir skaičiaus sandaugos kiekviena koordinatė lygi to vektoriaus atitinkamos koordinatės ir minėto skaičiaus sandaugai.*

Įsitikinsime. Sakykime, vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės $\{x;\ y\}$. Rasime vektoriaus $k\vec{a}$ koordinates; čia k — bet kuris skaičius. Kadangi $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$, tai $k\vec{a}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$. Iš čia išplaukia, kad vektoriaus $k\vec{a}$ koordinatės yra $\{kx;\ ky\}$.

Taikant išnagrinėtas taisykles, galima rasti kiekvieno vektoriaus, kuris yra duotų vektorių algebrinė suma, koordinates, kai žinomos jų koordinatės. Pavyzdžiui, reikia rasti vektoriaus $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$ koordinates, kai $\vec{a}\{1;\ -2\}$, $\vec{b}\{0;\ 3\}$, $\vec{c}\{-2;\ 3\}$.

Pagal 3⁰ taisyklę vektoriaus $2\vec{a}$ koordinatės yra $\{2;\ -4\}$, o vektoriaus $-\frac{1}{3}\vec{b}$ koordinatės — $\{0;\ -1\}$. Kadangi $\vec{p}=(2\vec{a})+$

$+\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{c}$, tai vektoriaus $\vec{p}$ koordinates galima rasti pagal 1° taisyklę: $\{2+0-2;\ -4-1+3\}$. Taigi vektoriaus $\vec{p}$ koordinatės $\{0;\ -2\}$.

Uždaviniai

911. Raskite skaičių k, su kuriuo būtų teisinga lygybė $\vec{n}=k\vec{m}$, kai: a) vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ priešpriešiai ir $|\vec{m}|=0{,}5$ cm, $|\vec{n}|=2$ cm; b) vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ vienakrypčiai ir $|\vec{m}|=12$ cm, $|\vec{n}|=24$ dm; c) vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ priešpriešiai ir $|\vec{m}|=400$ mm, $|\vec{n}|=4$ dm; d) vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ vienakrypčiai ir $|\vec{m}|=\sqrt{2}$ cm, $|\vec{n}|=\sqrt{50}$ cm.

912. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O, taškas M — atkarpos AO vidurys. Raskite skaičių k (jei toks yra), su kuriuo teisinga lygybė: a) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{BD}$; c) $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$; e) $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{DA}$; f) $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{CA}$; g) $\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{AM}$; h) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{CM}$; i) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$; k) $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{BD}$.

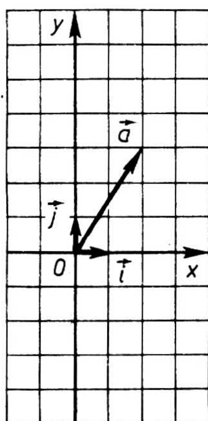
913. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs. Ar kolinearūs šie vektoriai: a) $\vec{a}+3\vec{b}$ ir $\vec{a}$; b) $\vec{b}-2\vec{a}$ ir $\vec{a}$? Atsakymą pagrįskite.

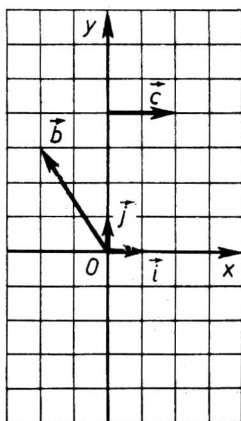
914. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs. Įrodykite, kad: a) vektoriai $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{a}-\vec{b}$ nekolinearūs; b) vektoriai $2\vec{a}-\vec{b}$ ir $\vec{a}+\vec{b}$ nekolinearūs; c) vektoriai $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{a}+3\vec{b}$ nekolinearūs.

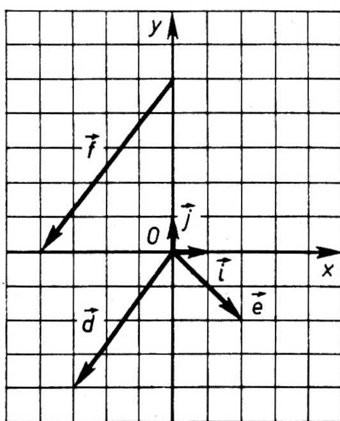
915. Taškas M yra lygiagretainio $ABCD$ įstrižainėje AC, $AM:MC=4:1$. Vektorių $\overrightarrow{AM}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

916. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs. Raskite skaičius x ir y, tenkinančius lygybę: a) $3\vec{a}-x\vec{b}=y\vec{a}+\vec{b}$; b) $4\vec{a}-x\vec{a}+5\vec{b}+y\vec{b}=\vec{0}$; c) $x\vec{a}+3\vec{b}-y\vec{b}=\vec{0}$; d) $\vec{a}+\vec{b}-3y\vec{a}+x\vec{b}=\vec{0}$.

917. Nubraižykite stačiakampę koordinačių sistemą Oxy bei koordinatinius vektorius $\vec{i}$ ir $\vec{j}$. Nubrėžkite vektorius, kurių pradžia O, o koordinatės šitokios: $\vec{a}\{3;\ 0\}$, $\vec{b}\{2;\ -1\}$, $\vec{c}\{0;\ -3\}$, $\vec{d}\{1;\ 1\}$, $\vec{e}\{2;\ \sqrt{2}\}$.







276 pav.

918. 276 paveiksle pavaizduotus vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ ir $\vec{f}$ išreikškite koordinatiniais vektoriais $\vec{i}$ ir $\vec{j}$, raskite tų vektorių koordinates.

919. Parašykite vektorių $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{c}=8\vec{i}$, $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e}=-2\vec{j}$, $\vec{f}=-\vec{i}$ koordinates.

920. Parašykite vektorių išraiškas koordinatiniais vektoriais $\vec{i}$ ir $\vec{j}$, kai: a) $\vec{x}\{-3;\ \frac{1}{5}\}$; b) $\vec{y}\{-2;\ -3\}$; c) $\vec{z}\{-1;\ 0\}$; d) $\vec{u}\{0;\ 3\}$; e) $\vec{v}\{0;\ 1\}$.

921. Raskite skaičius x ir y, tenkinančius sąlygą: a) $x\vec{i}+y\vec{j}=5\vec{i}-2\vec{j}$; b) $-3\vec{i}+y\vec{j}=x\vec{i}+7\vec{j}$; c) $x\vec{i}+y\vec{j}=-4\vec{i}$; d) $x\vec{i}+y\vec{j}=\vec{0}$.

922. Raskite vektoriaus $\vec{a}+\vec{b}$ koordinates, kai: a) $\vec{a}\{3;\ 2\}$, $\vec{b}\{2;\ 5\}$, b) $\vec{a}\{3;\ -4\}$, $\vec{b}\{1;\ 5\}$; c) $\vec{a}\{-4;\ -2\}$, $\vec{b}\{5;\ 3\}$; d) $\vec{a}\{2;\ 7\}$, $\vec{b}\{-3;\ -7\}$.

923. Raskite vektoriaus $\vec{a}-\vec{b}$ koordinates, kai: a) $\vec{a}\{5;\ 3\}$, $\vec{b}\{2;\ 1\}$; b) $\vec{a}\{3;\ 2\}$, $\vec{b}\{-3;\ 2\}$; c) $\vec{a}\{3;\ 6\}$, $\vec{b}\{4;\ -3\}$; d) $\vec{a}\{-5;\ -6\}$, $\vec{b}\{2;\ -4\}$.

924. Raskite vektorių $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$ koordinates, kai $\vec{a}\{3;\ 2\}$.

925. Duoti vektoriai $\vec{a}\{2;\ 4\}$, $\vec{b}\{-2;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ 0\}$, $\vec{d}\{-2;\ -3\}$, $\vec{e}\{2;\ -3\}$, $\vec{f}\{0;\ 5\}$. Raskite jiems priešingų vektorių koordinates.

926. Raskite vektoriaus $\vec{v}$ koordinates, kai: a) $\vec{v}=3\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{2;\ -5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 2\}$; b) $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{a}\{4;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ 2\}$, $\vec{c}\{2;\ 7\}$; c) $\vec{v}=3\vec{a}-2\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{a}\{-7;\ -1\}$, $\vec{b}\{-1;\ 7\}$, $\vec{c}\{4;\ -6\}$; d) $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}\{7;\ -2\}$, $\vec{b}\{2;\ 5\}$, $\vec{c}\{-3;\ 3\}$.

927. Įrodykite: jei du vektoriai kolinearūs, tai vieno vektoriaus koordinatės proporcingos kito vektoriaus koordinatėms. Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinį teiginį.

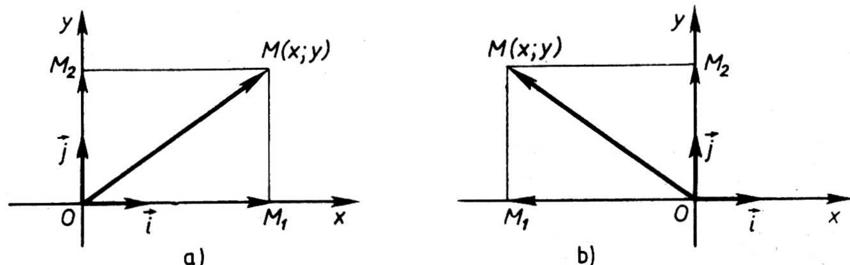
928. Duoti vektoriai $\vec{a}\{3;\ 7\}$, $\vec{b}\{-2;\ 1\}$, $\vec{c}\{6;\ 14\}$, $\vec{d}\{2;\ -1\}$, $\vec{e}\{2;\ 4\}$. Išrinkite kolinearių vektorių poras.

§ 2. PAPRASČIAUSI UŽDAVINIAI, SPRENDŽIAMI KOORDINAČIŲ METODU

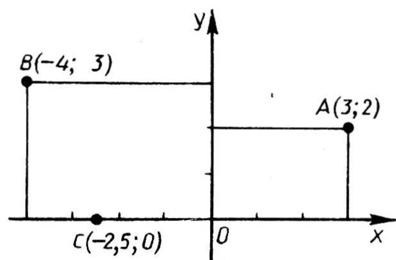
88. Vektoriaus bei jo pradžios ir pabaigos koordinačių ryšys. Išnagrinėkime stačiakampę koordinačių sistemą ir tašką M, kurio koordinatės $(x;\ y)$. Priminsime, kaip apibrėžiami skaičiai x ir y. Per tašką M nubrėžkime tieses, statmenas koordinačių ašims. Tų tiesių bei ašių Ox ir Oy susikirtimo taškus pažymėkime M_1 ir M_2 (277 pav.). Skaičius x (taško M abscisė) apibrėžiamas šitaip: $x=OM_1$, kai M_1 — teigiamosios pusašės taškas (277 pav., *a*); $x=-OM_1$, kai M_1 — neigiamosios pusašės taškas (277 pav., *b*); $x=0$, kai taškas M_1 sutampa su tašku O.

Panašiai apibrėžiamas skaičius y (taško M ordinatė). 278 paveiksle pavaizduota stačiakampė koordinačių sistema Oxy ir pažymėti taškai $A(3;\ 2)$, $B(-4;\ 3)$, $C(-2{,}5;\ 0)$.

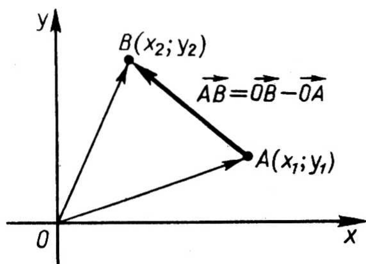
Vektorių $\overrightarrow{OM}$ vadinsime taško M *vietos vektoriumi*. Įrodysime, kad *taško M koordinatės lygios jo vietos vektoriaus atitinka-*



277 pav.



278 pav.



279 pav.

moms koordinatėms. Prisiminkime lygybę $\vec{OM}=\vec{OM_1}+\vec{OM_2}$ (žr. 277 pav.). Įrodysime, kad $\vec{OM_1}=x\vec{i}$ ir $\vec{OM_2}=y\vec{j}$. Jei $x>0$ (kaip 277 paveiksle, *a*), tai $x=OM_1$, o vektoriai $\vec{OM_1}$ ir $\vec{i}$ vienakrypčiai, todėl $\vec{OM_1}=OM_1\vec{i}=x\vec{i}$. Jei $x<0$ (kaip 277 paveiksle, *b*), tai $x=-OM_1$, o vektoriai $\vec{OM_1}$ ir $\vec{i}$ priešpriešiai, todėl $\vec{OM_1}=-OM_1\vec{i}=x\vec{i}$. Pagaliau jei $x=0$, tai $\vec{OM_1}=\vec{0}$, taigi lygybė $\vec{OM_1}=x\vec{i}$ ir šiuo atveju teisinga. Vadinasi, kiekvienu atveju $\vec{OM_1}=x\vec{i}$. Panašiai įrodoma, kad $\vec{OM_2}=y\vec{j}$. Vadinasi, $\vec{OM}=\vec{OM_1}+\vec{OM_2}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Iš čia išplaukia, kad vietos vektoriaus $\vec{OM}$ koordinatės yra $\{x;\ y\}$, t. y. lygios taško M atitinkamoms koordinatėms. Tai ir reikėjo įrodyti.

Remdamiesi įrodytu teiginiu, vektoriaus $\vec{AB}$ koordinates išreikšime jo pradžios A ir pabaigos B koordinatėmis. Sakykime, taško A koordinatės $(x_1;\ y_1)$, taško B — $(x_2;\ y_2)$. Vektorius $\vec{AB}$ lygus vektorių $\vec{OB}$ ir $\vec{OA}$ skirtumui (279 pav.), todėl jo koordinatės lygios vektorių $\vec{OB}$ ir $\vec{OA}$ atitinkamų koordinačių skirtumams. Tačiau $\vec{OB}$ ir $\vec{OA}$ — taškų B ir A vietos vektoriai, todėl vektoriaus $\vec{OB}$ koordinatės $\{x_2;\ y_2\}$, o vektoriaus $\vec{OA}$ koordinatės $\{x_1;\ y_1\}$. Vadinasi, vektoriaus $\vec{AB}$ koordinatės $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$.

Taigi *vektoriaus kiekviena koordinatė lygi jo pabaigos ir pradžios atitinkamų koordinačių skirtumui.*

275 paveiksle taškų B ir C koordinatės $(1;\ 4)$ ir $(4;\ 2)$, todėl vektoriaus $\vec{BC}$ koordinatės lygios $\{3;\ -2\}$.

89. Paprasčiausi uždaviniai, sprendžiami koordinačių metodu. Pasirinkus koordinačių sistemą, geometrines figūras ir jų savy-

bes galima nagrinėti sprendžiant lygtis ir nelygybes. Taigi geometrijai taikyti algebros metodus. Toks geometrinių figūrų savybių atskleidimo būdas vadinamas *koordinačių metodu.*

Išnagrinėsime tris pagalbinius uždavinius.

a) Atkarpos vidurio koordinatės. Sakykime, turime koordinačių sistemą Oxy ir taško A koordinatės yra $(x_1; y_1)$, o taško B koordinatės — $(x_2; y_2)$. Atkarpos AB vidurio C koordinates $(x; y)$ išreikšime jos galų koordinatėmis.

Kadangi C — atkarpos AB vidurys, tai

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}). \quad (1)$$

(Tokia lygybė įrodyta 84 skyrelyje.)

Vektorių $\vec{OC}$, $\vec{OA}$ ir $\vec{OB}$ koordinatės lygios taškų C, A ir B atitinkamoms koordinatėms: $\vec{OC}\{x; y\}$, $\vec{OA}\{x_1; y_1\}$ ir $\vec{OB}\{x_2; y_2\}$. (1) lygybę galima pakeisti šitokiomis lygybėmis, siejančiomis koordinates:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Taigi *atkarpos vidurio kiekviena koordinatė lygi jos galų atitinkamų koordinačių sumos pusei.*

b) Vektoriaus ilgio apskaičiavimas žinant jo koordinates. Įrodysime, kad *vektoriaus* $\vec{a}\{x; y\}$ *ilgis*

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nuo koordinačių pradžios atidėkime vektorių $\vec{OA} = \vec{a}$, iš taško A nuleiskime statmenis AA_1 ir AA_2 į ašis Ox ir Oy (280 pav.). Taško A koordinatės lygios vektoriaus $\vec{OA}$ koordinatėms, t. y. $(x; y)$, todėl $OA_1 = |x|$, $AA_1 = OA_2 = |y|$ (nagrinėjame atvejį, kai $x \neq 0$ ir $y \neq 0$; kitus atvejus išnagrinėkite savarankiškai). Remiantis Pitagoro teorema,

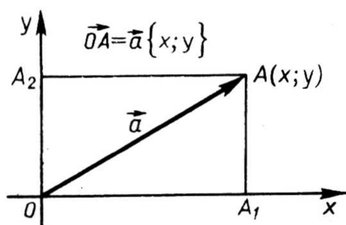
$$OA = \sqrt{OA_1^2 + AA_1^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tačiau $|\vec{a}| = |\vec{OA}| = OA$, todėl $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

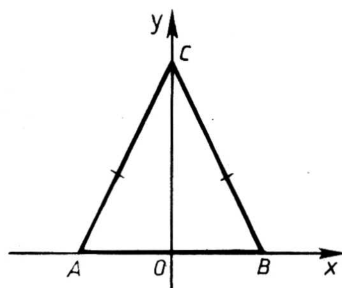
c) Atstumas tarp dviejų taškų. Sakykime, taško M_1 koordinatės $(x_1; y_1)$, taško M_2 koordinatės $(x_2; y_2)$. Atstumą d tarp taškų M_1 ir M_2 išreikšime tų taškų koordinatėmis.

Išnagrinėkime vektorių $\vec{M_1M_2}$. Jo koordinatės yra $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. Vadinasi, to vektoriaus ilgį galima rasti taikant formulę

$$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



280 pav.



281 pav.

Tačiau $|\overrightarrow{M_1M_2}|=d$. Taigi atstumas d tarp taškų $M_1(x_1;\ y_1)$ ir $M_2(x_2;\ y_2)$ išreiškiamas formule

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Uždaviniai

929. Taškas A yra teigiamojoje pusašėje Ox, taškas B — teigiamojoje pusašėje Oy. Raskite trikampio ABO viršūnių koordinates, kai: a) $OA=5$, $OB=3$; b) $OA=a$, $OB=b$.

930. Taškas A yra teigiamojoje pusašėje Ox, taškas B — teigiamojoje pusašėje Oy. Raskite stačiakampio $OACB$ viršūnių koordinates, kai: a) $OA=6{,}5$, $OB=3$; b) $OA=a$, $OB=b$.

931. Nubraižykite kvadratą $MNPQ$, kurio viršūnės P koordinatės būtų $(-3;\ 3)$, o kvadrato įstrižainės susikirstų koordinačių pradžioje. Raskite taškų M, N ir Q koordinates.

932. Raskite 281 paveiksle pavaizduoto lygiašonio trikampio ABC viršūnių koordinates, kai $AB=2a$, o aukštinė CO lygi h.

933. Raskite lygiagretainio $ABCD$ viršūnės D koordinates, kai $A(0;\ 0)$, $B(5;\ 0)$, $C(12;\ -3)$.

934. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates, kai žinomos jo pradžios ir pabaigos koordinatės: a) $A(2;\ 7)$, $B(-2;\ 7)$; b) $A(-5;\ 1)$, $B(-5;\ 27)$; c) $A(-3;\ 0)$, $B(0;\ 4)$; d) $A(0;\ 3)$, $B(-4;\ 0)$.

935. Lentelę persibraižykite į sąsiuvinį, užpildykite tuščius langelius, raskite x ir y.

A	$(0;\ 0)$	$(x;\ -3)$		$(a;\ b)$	$(1;\ 2)$
B	$(1;\ 1)$	$(2;\ -7)$	$(3;\ 1)$		
$\overrightarrow{AB}$		$\{5;\ y\}$	$\left\{-3;\ -\frac{1}{2}\right\}$	$\{c;\ d\}$	$\{0;\ 0\}$

936. Lentelę persibraižykite į sąsiuvinį ir, taikydami formules atkarpos AB vidurio M koordinatėms apskaičiuoti, užpildykite tuščius langelius.

A	$(2;\ -3)$		$(0;\ 1)$	$(0;\ 0)$	$(c;\ d)$	$(3;\ 5)$	$(3t+5,\ 7)$	$(1;\ 3)$
B	$(-3;\ 1)$	$(4;\ 7)$		$(-3;\ 7)$		$(3;\ 8)$	$(t+7;\ -7)$	
M		$(-3;\ -2)$	$(3;\ -5)$		$(a;\ b)$			$(0;\ 0)$

937. Duoti taškai $A(0;\ 1)$ ir $B(5;\ -3)$; taškas B — atkarpos AC vidurys, taškas D — atkarpos BC vidurys. Raskite taškų C ir D koordinates.

938. Apskaičiuokite šių vektorių ilgius: a) $\vec{a}\{5;\ 9\}$; b) $\vec{b}\{-3;\ 4\}$; c) $\vec{c}\{-10;\ -10\}$; d) $\vec{d}\{10;\ 17\}$; e) $\vec{e}\{11;\ -11\}$; f) $\vec{f}\{10;\ 0\}$.

939. Raskite atstumą nuo taško $M(3;\ -2)$ iki: a) abscisių ašies; b) ordinačių ašies; c) koordinačių pradžios.

940. Raskite atstumą tarp taškų A ir B, kai: a) $A(2;\ 7)$, $B(-2;\ 7)$; b) $A(-5;\ 1)$, $B(-5;\ -7)$; c) $A(-3;\ 0)$, $B(0;\ 4)$; d) $A(0;\ 3)$, $B(-4;\ 0)$.

941. Apskaičiuokite trikampio MNP perimetrą, kai $M(4;\ 0)$, $N(12;\ -2)$, $P(5;\ -9)$.

942. Žinomos trikampio ABC viršūnių koordinatės: $A(0;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C(5;\ 2)$. Raskite pusiaukraštinę AM.

943. Taškai B ir C yra ašių Ox ir Oy teigiamosiose pusašėse, taškas A yra neigiamojoje pusašėje Ox; $OA=a$, $OB=b$, $OC=h$. Raskite trikampio ABC kraštines AC ir BC.

944. Lygiagretainio $OACB$ viršūnė A yra teigiamojoje pusašėje Ox, viršūnės B koordinatės $(b;\ c)$, $OA=a$. Raskite: a) viršūnės C koordinates; b) kraštinę AC ir įstrižainę CO.

945. Trapecijos $OBCA$ pagrindai $OA=a$ ir $BC=d$, taškas A yra teigiamojoje pusašėje Ox, viršūnės B koordinatės $(b;\ c)$. Raskite kraštinę AC ir įstrižainę OC.

946. Raskite x, kai: a) atstumas tarp taškų $A(2;\ 3)$ ir $B(x;\ 1)$ lygus 2; b) atstumas tarp taškų $M_1(-1;\ x)$ ir $M_2(2x;\ 3)$ lygus 7.

947. Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis ir apskaičiuokite jo plotą, kai žinomos trikampio viršūnių koordinatės: a) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C(5;\ 2)$; b) $A(-4;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ 1)$.

948. Raskite ordinačių ašies tašką, vienodai nutolusį nuo taškų: a) $A(-3;\ 5)$ ir $B(6;\ 4)$; b) $C(4;\ -3)$ ir $D(8;\ 1)$.

949. Raskite abscisių ašies tašką, vienodai nutolusį nuo taškų: a) $A(1;\ 2)$ ir $B(-3;\ 4)$; b) $C(1;\ 1)$ ir $D(3;\ 5)$.

950. Įrodykite, kad keturkampis $MNPQ$ yra lygiagretainis ir raskite jo įstrižaines, kai: a) $M(1;\ 1)$, $N(6;\ 1)$, $P(7;\ 4,)$ $Q(2;\ 4)$; b) $M(-5;\ 1)$, $N(-4;\ 4)$, $P(-1;\ 5)$, $Q(-2;\ 2)$.

951. Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis ir apskaičiuokite jo plotą, kai: a) $A(-3;\ -1)$, $B(1;\ -1)$, $C(1;\ -3)$, $D(-3;\ -3)$; b) $A(4;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$, $D(0;\ 0)$.

Koordinačių metodo taikymas sprendžiant uždavinius

Atkarpos vidurio koordinačių ir atstumo tarp dviejų taškų formules galima taikyti sprendžiant sudėtingesnius geometrijos uždavinius. Tam reikia pasirinkti stačiakampę koordinačių sistemą ir uždavinio sąlygos duomenis išreikšti koordinatėmis. Tada uždavinys sprendžiamas atliekant algebrinius skaičiavimus.

952. Įrodykite, kad stačiojo trikampio įžambinės vidurys vienodai nutolęs nuo visų trijų jo viršūnių.

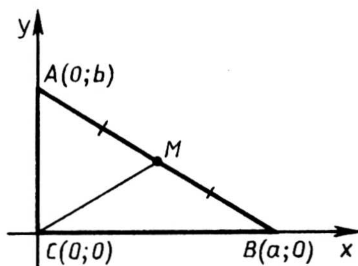
Sprendimas. Išnagrinėkime statųjį trikampį ABC, kurio statusis kampas C. Įžambinės AB vidurį pažymėkime raide M. Stačiakampę koordinačių sistemą pasirinkime taip, kaip parodyta 282 paveiksle. Jei $BC=a$, $AC=b$, tai trikampio viršūnių koordinatės šitokios: $C(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $A(0;\ b)$. Pagal atkarpos vidurio koordinačių formules randame taško M koordinates: $M\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$.

Taikydami atstumo tarp dviejų taškų formulę randame atkarpų MC ir MA ilgius:

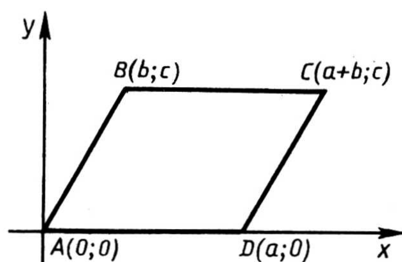
$$MC=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$MA=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Taigi $MA=MB=MC$. Tai ir reikėjo įrodyti.



282 pav.



283 pav.

953. Įrodykite, kad lygiagretainio visų kraštinių kvadratų suma lygi jo įstrižainių kvadratų sumai.

S p r e n d i m a s. Sakykime, $ABCD$ — lygiagretainis. Stačiakampę koordinačių sistemą parinkime taip, kaip parodyta 283 paveiksle. Jei $AD=BC=a$, o taško B koordinatės $(b; c)$, tai taško D koordinatės $(a; 0)$, o taško C koordinatės $(a+b; c)$. Taikydami atstumo tarp dviejų taškų formulę randame:

$$AB^2=b^2+c^2;\quad AD^2=a^2;\quad AC^2=(a+b)^2+c^2;\quad BD^2=(a-b)^2+c^2.$$

Iš čia gauname:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AB^2+AD^2)=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$AC^2+BD^2=(a+b)^2+c^2+(a-b)^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2).$$

Taigi $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$. Tai ir reikėjo įrodyti.

954. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 80 cm, o pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą, lygi 160 cm. Raskite kitas dvi to trikampio pusiaukraštines.

955. Trikampio aukštinė lygi 10 cm. Ji pagrindą dalija į 10 cm ir 4 cm atkarpas. Raskite pusiaukraštinę, kuri nubrėžta į mažesniąją iš kitų dviejų kraštinių.

·956. Įrodykite, kad lygiašonės trapecijos įstrižainės lygios. Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinį teiginį.

957. Įrodykite: jei lygiagretainio įstrižainės lygios, tai lygiagretainis yra stačiakampis.

958. $ABCD$ — stačiakampis. Įrodykite, kad

$$AM^2+CM^2=BM^2+DM^2;$$

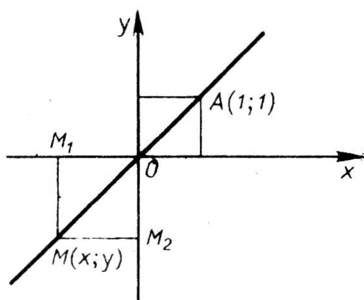
čia M — bet kuris plokštumos taškas.

§ 3. APSKRITIMO IR TIESĖS LYGTYS

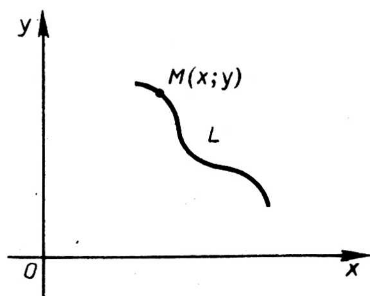
90. Plokštumos kreivės lygtis. Mokydamiesi algebros pasirinktoje stačiakampėje koordinačių sistemoje braižėme kai kurių funkcijų grafikus, pavyzdžiui, funkcijos $y=x$ grafiką. Žinome, kad tos funkcijos grafikas yra tiesė, einanti per taškus $O(0; 0)$ ir $A(1; 1)$ (284 pav.). Tiesės OA kiekvieno taško $M(x; y)$ koordinatės tenkina lygtį $y=x$ (nes $MM_1=MM_2$), o jokio taško, nesančio tiesėje OA, koordinatės tos lygties netenkina. Sakoma, kad lygtis $y=x$ yra tiesės OA lygtis. Dabar apibrėšime bet kurios kreivės lygties sąvoką.

Sakykime, plokštumoje turime stačiakampę koordinačių sistemą Oxy ir kurią nors kreivę L (285 pav.). *Lygtis su dviem kintamaisiais x ir y, kurią tenkina kreivės L kiekvieno taško koordinatės ir netenkina jokio taško, nesančio kreivėje L, koordinatės, vadinama kreivės L lygtimi.*

Nagrinėjant kreives koordinačių metodu, kyla du uždaviniai: 1) žinant kreivės geometrines savybes reikia rasti jos lygtį;



284 pav.



285 pav.

2) atvirkštinis uždavinys: turint kreivės lygtį, reikia išnagrinėti kreivės geometrines savybes. 91 skyrelyje pirmąjį uždavinį išnagrinėsime pasirinkdami apskritimą. Antrasis uždavinys nagrinėjamas algebros kurse — braižant funkcijų grafikus.

91. Apskritimo lygtis. Sudarysime apskritimo, kurio spindulys r ir centras C, lygtį, turėdami stačiakampę koordinačių sistemą. Sakykime, taško C koordinatės $(x_0;\ y_0)$ (286 pav.). Atstumas nuo bet kokio taško $M(x;\ y)$ iki taško C išreiškiamas formule $MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Jei M yra nagrinėjamo apskritimo taškas, tai $MC=r$, arba $MC^2=r^2$, t. y. taško M koordinatės tenkina lygtį

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \qquad (1)$$

Jei taškas $M(x;\ y)$ nėra nagrinėjamo apskritimo taškas, tai $MC^2\neq r^2$, todėl taško M koordinatės (1) lygties netenkina. Vadinasi, stačiakampėje koordinačių sistemoje apskritimo, kurio spindulys r ir centras $C(x_0;\ y_0)$, lygtis yra

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

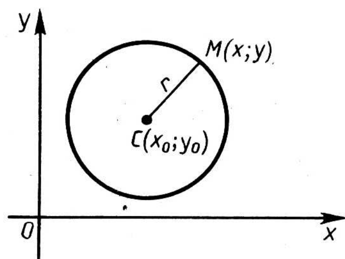
Skyrium imant, apskritimo, kurio spindulys r ir centras — koordinačių pradžia, lygtis yra

$$x^2+y^2=r^2.$$

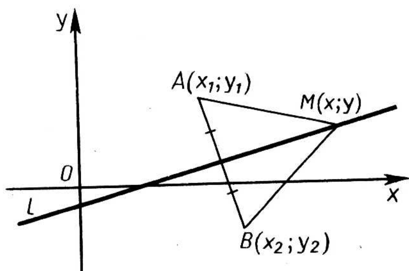
U ž d a v i n y s. *Apskritimo centras — taškas* $(-3;\ 4)$, *apskritimas eina per koordinačių pradžią. Reikia sudaryti apskritimo lygtį.*

S p r e n d i m a s. Apskritimo centro koordinatės $(-3;\ 4)$, todėl apskritimo lygtis $(x+3)^2+(y-4)^2=r^2$; čia r — kol kas nežinomas apskritimo spindulys. Rasime jį. Tam prisiminsime, kad apskritimas eina per koordinačių pradžią, t. y. taško $O(0;\ 0)$ koordinatės turi tenkinti parašytą lygtį: $(0+3)^2+(0-4)^2=r^2$. Iš čia $r^2=25$, taigi $r=5$. Vadinasi, ieškomoji apskritimo lygtis yra

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25.$$



286 pav.



287 pav.

Atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius gausime lygtį $x^2+y^2+6x-8y=0$. Ji irgi yra nagrinėjamo apskritimo lygtis.

92. Tiesės lygtis. Sudarysime duotos tiesės l lygtį, turėdami stačiakampę koordinačių sistemą. Pažymėkime du taškus $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$, kad tiesė l būtų atkarpos AB vidurio statmuo (287 pav.). Jei taškas $M(x; y)$ yra tiesės l taškas, tai $AM=BM$, arba $AM^2=BM^2$, t. y. taško M koordinatės tenkina lygtį

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2. \qquad (2)$$

Jei taškas $M(x; y)$ nėra tiesės l taškas, tai $AM^2 \neq BM^2$. Vadinasi, taško M koordinatės (2) lygties netenkina. Taigi (2) lygtis yra tiesės l lygtis turimoje koordinačių sistemoje. Reiškinius pakėlę kvadratu ir sutraukę panašiuosius narius, iš (2) lygties gauname lygtį

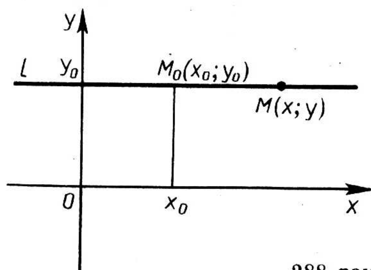
$$ax+by+c=0; \qquad (3)$$

čia $a=2(x_1-x_2)$, $b=2(y_1-y_2)$, $c=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2$. Kadangi $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ — skirtingi taškai, tai bent vienas skirtumų (x_1-x_2) ir (y_1-y_2) nelygus nuliui, t. y. bent vienas koeficientų a ir b nelygus nuliui. Taigi *tiesės lygtis stačiakampėje koordinačių sistemoje yra pirmojo laipsnio lygtis.*

Sudarysime tiesės l, einančios per tašką $M_0(x_0; y_0)$ ir lygiagrečios ašiai Ox, lygtį (288 pav.). Tiesės l kiekvieno taško $M(x; y)$ ordinatė lygi y_0, t. y. tiesės l kiekvieno taško $M(x; y)$ koordinatės tenkina lygtį $y=y_0$. Kiekvieno ne tiesės taško koordinatės tos lygties netenkina. Vadinasi, lygtis $y=y_0$ yra tiesės lygtis.

Panašiai gautume, kad tiesės, einančios per tašką $M_0(x_0; y_0)$ ir lygiagrečios ašiai Oy, lygtis yra $x=x_0$.

Aišku, kad ašies Ox lygtis $y=0$, o ašies Oy lygtis $x=0$.



288 pav.

959. Nubrėžkite apskritimą, kurio lygtis: a) $x^2+y^2=9$; b) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; c) $(x+5)^2+(y-3)^2=25$; d) $(x-1)^2+y^2=4$; e) $x^2+(y+2)^2=2$.

960. Kurie iš taškų $A(3; -4)$, $B(1; 0)$, $C(0; 5)$, $D(0; 0)$, $E(0; 1)$ yra apskritimo taškai; apskritimo lygtis: a) $x^2+y^2=25$; b) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$; c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$?

961. Apskritimo lygtis $(x+5)^2+(y-1)^2=16$. Be paveikslo nurodykite, kurie iš taškų $A(-2; 4)$, $B(-5; -3)$, $C(-7; -2)$ ir $D(1; 5)$ yra: a) skritulio, kurį riboja apskritimas, vidaus taškai; b) apskritimo taškai; c) šalia skritulio, kurį riboja apskritimas.

962. Duotas apskritimas $x^2+y^2=25$ bei taškai $A(3; 4)$ ir $B(4; -3)$. Įrodykite, kad AB — to apskritimo styga.

963. Apskritimo lygtis $x^2+y^2=25$. Raskite apskritimo taškus, kurių: a) abscisė lygi -4; b) ordinatė lygi 3.

964. Apskritimo lygtis $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. Raskite apskritimo taškus, kurių: a) abscisė lygi 3; b) ordinatė lygi 5.

965. Apskritimų centras — koordinačių pradžia, spinduliai $r_1=3$, $r_2=\sqrt{2}$, $r_3=\frac{5}{2}$. Parašykite apskritimų lygtis.

966. Apskritimo spindulys r, centras A. Parašykite apskritimo lygtį, kai: a) $A(0; 5)$, $r=3$; b) $A(-1; 2)$, $r=2$; c) $A(-3; -7)$, $r=\frac{1}{2}$; d) $A(4; -3)$, $r=10$.

967. Apskritimo centras — koordinačių pradžia, apskritimas eina per tašką $B(-1; 3)$. Parašykite apskritimo lygtį.

968. Apskritimo centras — taškas $A(0; 6)$, apskritimas eina per tašką $B(-3; 2)$. Parašykite apskritimo lygtį.

969. Apskritimo skersmuo MN. Parašykite apskritimo lygtį, kai: a) $M(-3; 5)$, $N(7; -3)$; b) $M(2; -1)$, $N(4; 3)$.

√ **970.** Apskritimas eina per tašką $A(1; 3)$, jo centras yra abscisių ašyje, o spindulys lygus 5. Parašykite apskritimo lygtį. Kiek yra tokių apskritimų?

√ **971.** Apskritimas eina per taškus $A(-3; 0)$ ir $B(0; 9)$, jo centras yra ordinačių ašyje. Parašykite apskritimo lygtį.

972. Parašykite tiesės, einančios per du taškus, lygtį. Taškai šie: a) $A(1; -1)$ ir $B(-3; 2)$; b) $C(2; 5)$ ir $D(5; 2)$; c) $M(0; 1)$ ir $N(-4; -5)$.

Sprendimas: a) Tiesės AB lygtis yra $ax+by+c=0$. Kadangi taškai A ir B yra tiesės AB taškai, tai jų koordinatės turi tenkinti tą lygtį:

$$a\cdot 1+b(-1)+c=0,\quad a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0,$$
$$\text{arba}\quad a-b+c=0,\quad -3a+2b+c=0.$$

Iš tų lygčių koeficientus a ir b išreiškiame koeficientu c: $a=3c$, $b=4c$. Tas reikšmes įrašę į tiesės lygtį, gauname $3cx+4cy+c=0$. Su kiekvienu $c\neq0$ ta lygtis yra tiesės AB lygtis. Padaliję iš c gauname šitokią ieškomąją lygtį: $3x+4y+1=0$.

973. Trikampio ABC viršūnių koordinatės yra tokios: $A(4;\ 6)$, $B(-4;\ 0)$, $C(-1;\ -4)$. Parašykite tiesės, kurioje yra pusiaukraštinė CM, lygtį.

974. Trapecijos $ABCD$ viršūnių koordinatės yra tokios: $A(-2;\ -2)$, $B(-3;\ 1)$, $C(7;\ 7)$ ir $D(3;\ 1)$. Parašykite: a) tiesių, kuriose yra įstrižainės AC ir BD, lygtis; b) tiesės, kurioje yra trapecijos vidurinė linija, lygtį.

975. Raskite tiesės $3x-4y+12=0$ ir koordinačių ašių susikirtimo taškų koordinates. Nubrėžkite tą tiesę.

976. Raskite tiesių $4x+3y-6=0$ ir $2x+y-4=0$ susikirtimo taško koordinates.

977. Parašykite tiesių, einančių per tašką $M(2;\ 5)$ ir lygiagrečių koordinačių ašims, lygtis.

978. Nubrėžkite tiesę, kurios lygtis: a) $y=3$; b) $x=-2$; c) $y=-4$; d) $x=7$.

979. Raskite tiesės AB taško M, kurio abscisė lygi 5, ordinatę; $A(-8;\ -6)$, $B(-3;\ -1)$.

980. Rombo įstrižainės yra koordinačių ašyse, jos lygios 10 cm ir 4 cm. Parašykite tiesių, kuriose yra rombo kraštinės, lygtis.

Uždaviniai, kuriuos sprendžiant naudojamos apskritimo ir tiesės lygtys

981. Duoti du taškai: A ir B. Raskite visų taškų, kurių kiekvieno atstumas nuo taško A du kartus didesnis už atstumą nuo taško B, aibę.

Sprendimas. Stačiakampę koordinačių sistemą pasirinkime taip, kaip parodyta 289 paveiksle, a. Tada taškų A ir B koordinatės šitokios: $A(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$; čia $a=AB$.

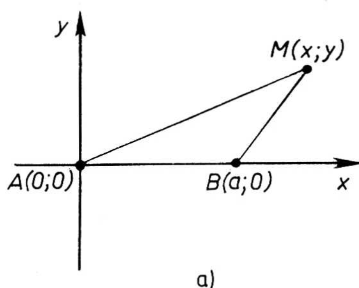
Randame atstumus nuo bet kurio taško $M(x;\ y)$ iki taškų A ir B:

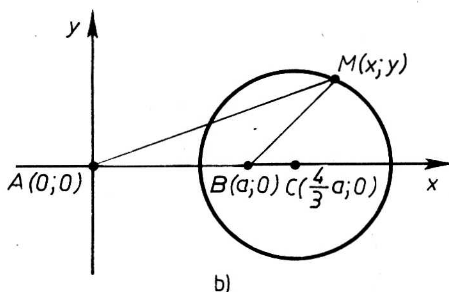
$$AM=\sqrt{x^2+y^2},\quad BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Jei taškas $M(x;\ y)$ priklauso ieškomai aibei, tai $AM=2BM$, arba $AM^2=4BM^2$, todėl jo koordinatės tenkina lygtį

$$x^2+y^2=4((x-a)^2+y^2). \qquad (4)$$

Jei taškas M nepriklauso ieškomai aibei, tai jo koordinatės tos lygties netenkina.





289 pav.

Vadinasi, (4) lygtis yra ieškomos taškų aibės lygtis parinktoje koordinačių sistemoje. Atskliautę ir atitinkamai sugrupavę dėmenis, (4) lygtį pakeičiame lygtimi $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+$ $+y^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2$.

Taigi ieškomoji taškų aibė yra apskritimas, kurio spindulys $\frac{2}{3}a$, o centras — taškas $C\left(\frac{4}{3}a;\ 0\right)$. Tas apskritimas pavaizduotas 289 paveiksle, *b*.

P a s t a b a. Panašiai galima įrodyti, kad visų taškų M, tenkinančių sąlygą $AM=kBM$ (k — nelygus vienetui teigiamasis skaičius), aibė yra apskritimas, kurio spindulys $\frac{ka}{|k^2-1|}$, o centras — taškas $\left(\frac{k^2a}{k^2-1};\ 0\right)$.

Tie apskritimai, atitinkantys skirtingas $k\neq1$ reikšmes, vadinami *Apolònijo apskritìmais,* nes juos nagrinėjo jau senovės graikų matematikas Apolonijas savo darbe „Apie skritulius" II a. pr. Kr.

Kai $k=1$, turime jau žinomą visų taškų, vienodai nutolusių nuo taškų A ir B, aibės radimo uždavinį. Žinome, kad ta aibė yra atkarpos AB vidurio statmuo.

982. Taškas B — atkarpos AC, kurios ilgis lygus 2, vidurys. Raskite visų taškų M, tenkinančių nurodytą sąlygą, aibę: a) $AM^2+BM^2+CM^2=50$; b) $AM^2+2BM^2+3CM^2=4$.

983. Duoti du taškai: A ir B. Raskite visų taškų M, kurių kiekvienas tenkina sąlygą $AM^2+BM^2=k^2$, aibę; čia k — duotas skaičius.

984. Duoti du taškai: A ir B. Raskite visų taškų M, kurių kiekvienas tenkina sąlygą $AM^2-BM^2=k$, aibę; čia k — duotas skaičius.

S p r e n d i m a s. Pasirinkime stačiakampę koordinačių sistemą, kurios pradžia — taškas A, o taško B koordinatės $(a;\ 0)$; čia $a=AB$.

Randame atstumus nuo bet kurio taško $M(x;\ y)$ iki taškų A ir B:

$$AM=\sqrt{x^2+y^2},\quad BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Jei taškas $M(x;\ y)$ priklauso ieškomai aibei, tai $AM^2-BM^2=k$, todėl taško M koordinatės tenkina lygtį $x^2+y^2-(x-a)^2-y^2=k$, arba $2ax-a^2-k=0$. Jei taškas M nepriklauso ieškomai aibei, tai jo koordinatės tos lygties netenkina. Taigi gautoji lygtis yra ieškomos taškų aibės lygtis. Tačiau ta lygtis nusako tiesę, lygiagrečią ašiai Oy, kai $a^2+k\neq 0$, ir ašį Oy, kai $a^2+k=0$. Taigi ieškomoji taškų aibė yra tiesei AB statmena tiesė.

985. Duoti du taškai: A ir B. Raskite visų taškų M, tenkinančių sąlygą $BM^2-AM^2=2AB^2$, aibę.

986. $ABCD$ — stačiakampis. Raskite visų taškų M, tenkinančių sąlygą

$$(AM^2+DM^2)-(BM^2+CM^2)=2AB^2,$$

aibę.

987*. $ABCD$ — rombas, kurio įstrižainės lygios $2a$ ir $2b$. Raskite visų taškų M, tenkinančių sąlygą

$$AM^2+DM^2=BM^2+CM^2,$$

aibę.

X SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Suformuluokite ir įrodykite kolineariųjų vektorių lemą.
2. Ką reiškia vektorių išreikšti dviem duotais vektoriais?
3. Suformuluokite ir įrodykite vektoriaus reiškimo dviem nekolineariais vektoriais teoremą.
4. Paaiškinkite, kaip apibrėžiama stačiakampė koordinačių sistema.
5. Kas yra koordinatiniai vektoriai?
6. Suformuluokite ir įrodykite bet kurio vektoriaus reiškimo koordinatiniais vektoriais teiginį.
7. Kas yra vektoriaus koordinatės? Kokios yra koordinatinių vektorių koordinatės? Kaip susijusios lygių vektorių koordinatės?
8. Suformuluokite ir įrodykite vektorių sumos ir skirtumo bei vektoriaus ir skaičiaus sandaugos koordinačių radimo taisykles, kai žinomos vektorių koordinatės.
9. Kas yra taško vietos vektorius? Įrodykite, kad taško koordinatės lygios jo vietos vektoriaus atitinkamoms koordinatėms.
10. Išveskite formules vektoriaus koordinatėms apskaičiuoti, kai žinomos jo pradžios ir pabaigos koordinatės.

11. Išveskite formules atkarpos vidurio koordinatėms apskaičiuoti, kai žinomos jos galų koordinatės.
12. Išveskite formulę vektoriaus ilgiui apskaičiuoti, kai žinomos jo koordinatės.
13. Išveskite formulę atstumui tarp dviejų taškų apskaičiuoti, kai žinomos jų koordinatės.
14. Pateikite geometrijos uždavinio, sprendžiamo koordinačių metodu, pavyzdį.
15. Kokia lygtis vadinama duotos kreivės lygtimi? Pateikite pavyzdį.
16. Išveskite apskritimo, kurio spindulys ir centras žinomi, lygtį.
17. Parašykite apskritimo, kurio centras — koordinačių pradžia ir žinomas spindulys, lygtį.
18. Išveskite tiesės lygtį stačiakampėje koordinačių sistemoje.
19. Parašykite tiesių, einančių per tašką $M_0(x_0;\ y_0)$ ir lygiagrečių koordinačių ašims, lygtis.
20. Parašykite koordinačių ašių lygtis.
21. Pateikite geometrijos uždavinių, kuriuos sprendžiant būtų pritaikomos apskritimo ir tiesės lygtys.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

988. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs. Raskite skaičių x (jei toks yra), kad vektoriai $\vec{p}$ ir $\vec{q}$ būtų kolinearūs:

a) $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$;

b) $\vec{p}=x\vec{a}-\vec{b},\ \vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$;

c) $\vec{p}=\vec{a}+x\vec{b},\ \vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$;

d) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{q}=x\vec{a}+\vec{b}$.

989. Raskite vektoriaus $\vec{p}$ koordinates ir ilgį, kai:

a) $\vec{p}=7\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{a}\{1;\ -1\},\ \vec{b}\{5;\ -2\}$;

b) $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{a}\{6;\ 3\},\ \vec{b}\{5;\ 4\}$;

c) $\vec{p}=5\vec{a}-4\vec{b},\ \vec{a}\left\{\frac{3}{5};\ \frac{1}{5}\right\},\ \vec{b}\{6;\ -1\}$;

d) $\vec{p}=3(-2\vec{a}-4\vec{b}),\ \vec{a}\{1;\ 5\},\ \vec{b}\{-1;\ 1\}$.

990. Duoti vektoriai $\vec{a}\{3;\ 4\}$, $\vec{b}\{6;\ -8\}$, $\vec{c}\{1;\ 5\}$. a) Raskite vektorių $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{r}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{s}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ koordinates. b) Raskite $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$.

991. Įrodykite, kad atstumas tarp dviejų abscisių ašies taškų $M_1(x_1;\ 0)$ ir $M_2(x_2;\ 0)$ išreiškiamas formule $d=|x_1-x_2|$.

992. Įrodykite, kad trikampis ABC, kurio viršūnės $A(4;\ 8)$, $B(12;\ 11)$, $C(7;\ 0)$, lygiašonis, bet nelygiakraštis.

993. Įrodykite, kad trikampio ABC, kurio viršūnės $A(-5;\ 6)$, $B(3;\ -9)$ ir $C(-12;\ -17)$, kampai A ir C lygūs.

994. Įrodykite, kad taškas D vienodai nutolęs nuo taškų A, B, C, kai: a) $D(1;\ 1)$, $A(5;\ 4)$, $B(4;\ -3)$, $C(-2;\ 5)$; b) $D(1;\ 0)$, $A(7;\ -8)$, $B(-5;\ 8)$, $C(9;\ 6)$.

995. Raskite abscisių ašies tašką, vienodai nutolusį nuo taškų $M_1(-2;\ 4)$ ir $M_2(6;\ 8)$.

996. Trikampio ABC viršūnių koordinatės šitokios: $A(-5;\ 13)$, $B(3;\ 5)$, $C(-3;\ -1)$. Raskite: a) trikampio kraštinių vidurio taškų koordinates; b) pusiaukraštinę, nubrėžtą į kraštinę AC; c) trikampio vidurines linijas.

997. Keturkampio $ABCD$ viršūnės $A(3;\ 2)$, $B(0;\ 5)$, $C(-3;\ 2)$, $D(0;\ -1)$. Įrodykite, kad tas keturkampis — kvadratas.

998. Keturkampio $ABCD$ viršūnės $A(-2;\ -3)$, $B(1;\ 4)$, $C(8;\ 7)$, $D(5;\ 0)$. Įrodykite, kad tas keturkampis — rombas. Raskite jo plotą.

999. Lygiagretainio trijų viršūnių koordinatės šitokios: $(-4;\ 4)$, $(-5;\ 1)$ ir $(-1;\ 5)$. Raskite ketvirtos viršūnės koordinates. Kiek sprendinių turi uždavinys?

1000. Išaiškinkite, kurios iš duotų lygčių yra apskritimų lygtys. Raskite kiekvieno apskritimo centrą ir spindulį:

a) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;
b) $x^2+(y+7)^2=1$;
c) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$;
d) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
e) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

1001. Apskritimas eina per taškus $A(3;\ 0)$ ir $B(-1;\ 2)$, jo centras yra tiesėje $y=x+2$. Parašykite apskritimo lygtį.

1002. Parašykite apskritimo, einančio per tris duotus taškus, lygtį, kai: a) $A(1;\ -4)$, $B(4;\ 5)$, $C(3;\ -2)$; b) $A(3;\ -7)$, $B(8;\ -2)$, $C(6;\ 2)$.

1003. Trikampio ABC viršūnės šitokios: $A(-7;\ 5)$, $B(3;\ -1)$, $C(5;\ 3)$. Sudarykite: a) trikampio kraštinių vidurio statmenų lygtis; b) tiesių AB, BC ir CA lygtis; c) tiesių, kuriose yra trikampio vidurinės linijos, lygtis.

1004. Įrodykite, kad tiesės, kurių lygtys $3x-1{,}5y+1=0$ ir $2x-y-3=0$, lygiagrečios.

1005. Įrodykite, kad taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, kai:

a) $A(-2;\ 0)$, $B\left(3;\ 2\frac{1}{2}\right)$, $C(6;\ 4)$; b) $A(3;\ 10)$, $B(3;\ 12)$; $C(3;\ -6)$; c) $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(-10;\ -31)$.

Uždaviniai, kurie sprendžiami koordinačių metodu

1006. Dvi trikampio kraštinės lygios 17 cm ir 28 cm, o į didesniąją jų nuleista aukštinė lygi 15 cm. Raskite trikampio pusiaukraštines.

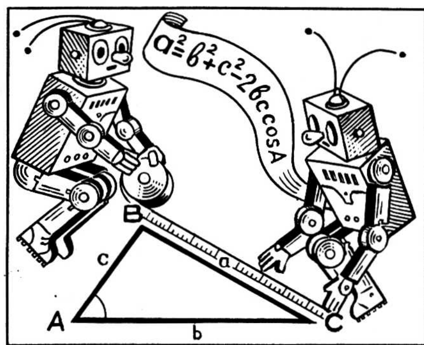
1007. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus, lygi pagrindų skirtumo pusei.

1008. $ABCD$ — lygiagretainis. Įrodykite, kad su visais taškais M dydžio $(AM^2+CM^2)-(BM^2+DM^2)$ reikšmė ta pati.

1009. Įrodykite, kad trikampio ABC pusiaukraštinę AA_1 galima išreikšti formule $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-BC^2}$. Remdamiesi formule įrodykite: jei trikampio dvi pusiaukraštinės lygios, tai trikampis lygiašonis.

1010. Duoti du taškai: A ir B. Raskite aibę visų taškų M, tenkinančių sąlygą:

a) $2AM^2-BM^2=2AB^2$; b) $AM^2+2BM^2=6AB^2$.



XI skyrius

TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ PRIEKLAUSOS. VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA

§ 1. KAMPO SINUSAS, KOSINUSAS IR TANGENTAS

93. Sinusas, kosinusas, tangentas. Pasirinkime stačiakampę koordinačių sistemą Oxy ir apskritimo, kurio spindulys lygus 1 ir centras — koordinačių pradžia, pusapskritimį, esantį pirmame ir antrame ketvirčiuose (290 pav.). Jį vadinsime *vienetiniù pùsapskritimiu*. Iš taško O nubrėžkime spindulį h, kertantį vienetinį pusapskritimį. Sakykime, $M(x;\ y)$ — susikirtimo taškas. Kampą tarp spindulio h ir abscisių ašies teigiamosios pusašės pažymėkime raide α (jei spindulys h sutampa su abscisių ašies teigiamąja pusaše, tai laikysime, kad $\alpha=0°$).

Jei kampas α — smailusis, tai iš stačiojo trikampio DOM (žr. 290 pav.) turime

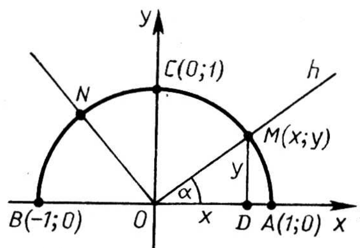
$$\sin\alpha=\frac{MD}{OM},\quad \cos\alpha=\frac{OD}{OM}.$$

Tačiau $OM=1$, $MD=y$, $OD=x$, todėl

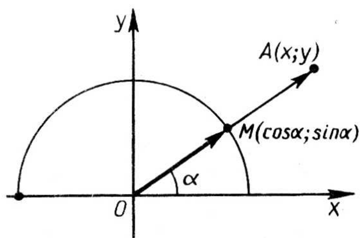
$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x. \tag{1}$$

Taigi smailiojo kampo α sinusas lygus taško M ordinatei y, o kampo α kosinusas — taško M abscisei x. Kai kampas α status, bukasis arba ištiestinis (290 paveiksle kampai AOC, AON ir AOB) arba $\alpha=0°$, kampo α sinusą ir kosinusą irgi apibrėšime (1) formulėmis. Taigi *kampo* α $(0°\leqslant\alpha\leqslant180°)$ *sìnusu vadinama taško M ordinatė y, o kampo α kosìnusu — taško M abscisė x.* Kadangi vienetinio pusapskritimio taškų $(x;\ y)$ koordinatės yra intervaluose $0\leqslant y\leqslant1$, $-1\leqslant x\leqslant1$, tai, kad ir koks būtų kampas α $(0°\leqslant\alpha\leqslant180°)$, teisingos nelygybės

$$0\leqslant\sin\alpha\leqslant1,\quad -1\leqslant\cos\alpha\leqslant1.$$



290 pav.



291 pav.

Rasime 0°, 90° ir 180° kampų sinuso ir kosinuso reikšmes. Tam išnagrinėkime tuos kampus atitinkančius spindulius OA, OC ir OB (žr. 290 pav.). Kadangi taškų A, C ir B koordinatės $A(1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, tai

$$\sin 0^\circ=0,\quad \sin 90^\circ=1,\quad \sin 180^\circ=0, \tag{2}$$
$$\cos 0^\circ=1,\quad \cos 90^\circ=0,\quad \cos 180^\circ=-1.$$

Kampo α ($\alpha\neq 90^\circ$) *tángentu vadinamas santykis* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, t. y.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Kai $\alpha=90^\circ$, $\operatorname{tg}\alpha$ neapibrėžtas, nes $\cos 90^\circ=0$, todėl (3) formulėje vardiklis būtų lygus nuliui. Remdamiesi (2) lygybėmis randame: $\operatorname{tg} 0^\circ=0$, $\operatorname{tg} 180^\circ=0$.

94. Pagrindinė trigonometrijos tapatybė. Redukcijos formulės. 290 paveiksle pavaizduota koordinačių sistema Oxy ir vienetinis pusapskritimis ACB, kurio centras O. Tas pusapskritimis yra apskritimo, kurio lygtis $x^2+y^2=1$, lankas. Į šią lygtį įrašę x ir y išraiškas iš (1) formulių gauname lygybę

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \tag{4}$$

kuri teisinga su visais α iš minėto intervalo ($0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 180^\circ$). (4) lygybė vadinama *pagrindinė trigonomètrijos tapatýbe*. Anksčiau ji buvo įrodyta smailiųjų kampų atveju.

Teisingos ir šios tapatybės:

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\quad \text{kai } 0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ, \tag{5}$$
$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \text{kai } 0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 180^\circ. \tag{6}$$

Jos vadinamos *redùkcijos fòrmulėmis* ir įrodomos algebros kurse.

95. Formulės taško koordinatėms apskaičiuoti. Sakykime, turime koordinačių sistemą Oxy ir tašką $A(x;\ y)$, kurio ordinatė y neneigiama (291 pav.). Taško A koordinates išreikšime atkarpos OA ilgiu ir kampu α tarp spindulio OA ir teigiamosios pusašės Ox. Spindulio OA ir vienetinio pusapskritimio susikirtimo tašką pažymėkime raide M. Remiantis (1) formulėmis, taško M koordinatės lygios $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Vektoriaus OM koordinatės tokios pat, kaip ir taško M, t. y. $\overrightarrow{OM}\{\cos\alpha;\ \sin\alpha\}$. Vektoriaus $\overrightarrow{OA}$ koordinatės tokios pat, kaip ir taško A, t. y. $\overrightarrow{OA}\{x;\ y\}$. Tačiau $\overrightarrow{OA}=OA\cdot\overrightarrow{OM}$ (paaiškinkite, kodėl), todėl

$$x=OA\cos\alpha,\quad y=OA\sin\alpha. \tag{7}$$

Uždaviniai

1011. a) Ar vienetinio pusapskritimio taško abscisės reikšmė gali būti 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$; $-2{,}8$? b) Ar vienetinio pusapskritimio taško ordinatės reikšmė gali būti 0,6; $\frac{1}{7}$; $-0{,}3$; 7; 1,002? Atsakymus pagrįskite.

1012. Patikrinkite, ar taškai $M_1(0;\ 1)$, $M_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $A(1;\ 0)$, $B(-1;\ 0)$ yra vienetinio pusapskritimio taškai. Parašykite kampų AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.

1013. Raskite $\sin\alpha$, kai: a) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; b) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; c) $\cos\alpha=-1$.

1014. Raskite $\cos\alpha$, kai: a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$; c) $\sin\alpha=0$.

1015. Raskite $\operatorname{tg}\alpha$, kai: a) $\cos\alpha=1$; b) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ir $0°<\alpha<90°$; d) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ir $90°<\alpha<180°$.

1016. Apskaičiuokite 120°, 135°, 150° kampų sinusą, kosinusą ir tangentą.

1017. Nubraižykite $\angle A$, kai: a) $\sin A=\frac{2}{3}$; b) $\cos A=\frac{3}{4}$; c) $\cos A=-\frac{2}{5}$.

1018. Kampas tarp spindulio OA, kertančio vienetinį pusapskritimį, ir teigiamosios pusašės Ox lygus α. Raskite taško A koordinates, kai: $OA=3$, $\alpha=45°$; b) $OA=1{,}5$, $\alpha=90°$; c) $OA=5$, $\alpha=150°$; d) $OA=1$, $\alpha=180°$; e) $OA=2$, $\alpha=30°$.

1019. Raskite kampą tarp spindulio OA ir teigiamosios pusašės Ox, kai žinomos taško A koordinatės: a) $(2;\ 2)$; b) $(0;\ 3)$; c) $(-\sqrt{3};\ 1)$; d) $(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

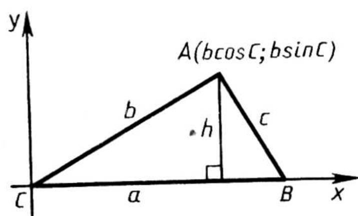
§ 2. TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ PRIEKLAUSOS

96. Trikampio ploto teorema

T e o r e m a: ***Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.***

Į r o d y m a s. Sakykime, trikampio ABC kraštinės $BC=a$, $CA=b$, o plotas S. Įrodysime, kad

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$



292 pav.

Koordinačių sistemą pasirinkime šitaip: koordinačių pradžia — taškas C, teigiamoji pusašė Ox eina per tašką B, o taško A ordinatė teigiama (292 pav.). Nagrinėjamo trikampio plotą galima apskaičiuoti taikant formulę $S=\frac{1}{2}ah$; čia h — trikampio aukštinė. Tačiau aukštinė h lygi taško A ordinatei, t. y. $h=b\sin C$. Vadinasi, $S=\frac{1}{2}ab\sin C$. Teorema įrodyta.

97. Sinusų teorema

Teorema. ***Trikampio kraštinės proporcingos prieš jas esančių kampų sinusams.***

Įrodymas. Sakykime, trikampio ABC kraštinės $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Įrodysime, kad

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Remiantis trikampio ploto teorema,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\ S=\frac{1}{2}bc\sin A,\ S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

Iš pirmųjų dviejų lygybių gauname $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$. Iš čia $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$. Iš pirmosios ir trečiosios lygybių taip pat išplaukia $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. Taigi

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Teorema įrodyta.

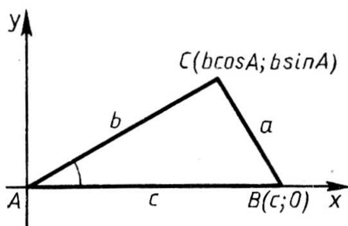
Pastaba. Galima įrodyti (žr. 1033 uždavinį), kad trikampio kraštinės ir prieš ją esančio kampo sinuso santykis lygus apie trikampį apibrėžto apskritimo skersmeniui. Vadinasi, kad ir koks būtų trikampis ABC, teisingos lygybės

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R;$$

čia $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ — trikampio kraštinės, R — apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys.

98. Kosinusų teorema

T e o r e m a. ***Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai minus dviguba tų kraštinių ir tarp jų esančio kampo kosinuso sandauga.***



293 pav.

Į r o d y m a s. Sakykime, trikampio ABC kraštinės $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Pavyzdžiui, įrodysime, kad

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \quad (1)$$

Koordinačių sistemą, kurios pradžia — taškas A, pasirinkime taip, kaip parodyta 293 paveiksle. Tada taško B koordinatės $(c;\ 0)$, o taško C koordinatės — $(b\cos A;\ b\sin A)$. Pritaikę atstumo tarp dviejų taškų formulę gauname:

$$BC^2=a^2=(b\cos A-c)^2+b^2\sin^2 A=$$
$$=b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A-2bc\cos A+c^2=$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

Teorema įrodyta.

Kosinusų teorema kartais vadinama *apibeñdrintąja Pitagòro teoremà*. Pavadinimas paaiškinamas tuo, kad Pitagoro teorema yra atskiras kosinusų teoremos atvejis. Įsitikinsime. Jei trikampio ABC kampas A statusis, tai $\cos A=\cos 90°=0$ ir iš (1) formulės gauname $a^2=b^2+c^2$, t. y. įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.

99. Trikampio sprendimas. Trikampio sprendimu vadinamas jo visų šešių elementų (t. y. trijų kraštinių ir trijų kampų) radimas, kai duoti kurie nors trys trikampį apibrėžiantys elementai. Išnagrinėsime tris trikampio sprendimo uždavinius. Trikampio ABC kraštines žymėsime šitaip: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

1 u ž d a v i n y s (trikampio sprendimas, kai duotos dvi kraštinės ir kampas tarp jų). *Duota:* a, b, $\angle C$. *Reikia rasti:* c, $\angle A$, $\angle B$.

S p r e n d i m a s. 1. Remdamiesi kosinusų teorema randame c:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}.$$

2. Remdamiesi kosinusų teorema randame

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Kampą A randame pasinaudodami skaičiuotuvu arba lentele[1].

3. $\angle B=180°-\angle A-\angle C$.

[1] Kaip naudotis lentele, aprašyta 2 priede.

2 u ž d a v i n y s (trikampio sprendimas, kai duota kraštinė ir prie jos esantys kampai). *Duota:* a, $\angle B$ $\angle C$. *Reikia rasti* $\angle A$, b, c.

S p r e n d i m a s. 1. $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$.

2. Remdamiesi sinusų teorema apskaičiuojame b ir c:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

3 u ž d a v i n y s (trikampio sprendimas, kai duotos trys kraštinės). *Duota:* a, b ir c. *Reikia rasti:* $\angle A$, $\angle B$ ir $\angle C$.

S p r e n d i m a s. 1. Taikydami kosinusų teoremą randame

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Kampą A randame pasinaudodami skaičiuotuvu arba lentele.

2. Panašiai randame kampą B.

3. $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.

P a v y z d y s. Aikštės taške A futbolo kamuolys yra nutolęs nuo vartų virpstų pagrindų B ir C per 23 m ir 24 m (294 pav.). Vartų plotis lygus 7 m. Futbolininkas spiria kamuolį į vartus. Raskite kamuolio pataikymo į vartus kampą α.

S p r e n d i m a s. Išnagrinėkime trikampį ABC, kurio viršūnės yra kamuolio buvimo vieta A bei vartų virpstų pagrindai B ir C. Remiantis uždavinio sąlyga, $c = AB = 23$ m, $b = AC = 24$ m ir $a = BC = 7$ m. Turėdami šiuos duomenis galime išspręsti trikampį ABC ir rasti kampą α, lygų kampui A (žr. 3 uždavinį). Remdamiesi kosinusų teorema randame $\cos A$:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{24^2+23^2-7^2}{2\cdot 24\cdot 23}.$$

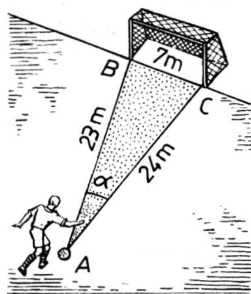
Kampą α rasime skaičiuotuvu pagal šią programą:

24 [F] [x^2] 23 [F] [x^2] [+] 7 [F] [x^2] [−] 2 [÷] 23 [÷] 24 [÷]

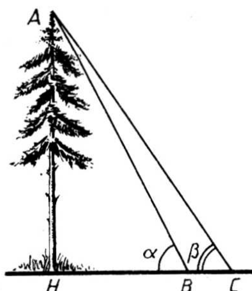
[÷] [F] [$\cos^{-1}$]

Indikatoriuje matome kampo α reikšmę laipsniais: 16,957426. Laipsnio dalis išreiškę minutėmis gauname $\alpha \approx 16°57'$. Tą patį rezultatą galima gauti pasinaudojant lentele.

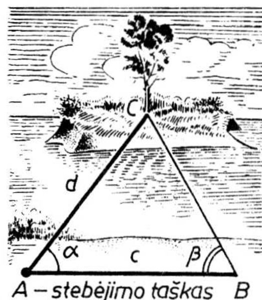
100. Matavimo darbai. Trigonometrijos formulės taikomos atliekant įvairius matavimo vietovėje darbus.



294 pav.



295 pav.



296 pav.

a) Daikto aukščio radimas. Sakykime, reikia rasti kokio nors daikto aukštį AH (295 pav.). Tam žinomu atstumu a nuo daikto pagrindo H pažymėkime tašką B ir išmatuokime kampą ABH: $\angle ABH=\alpha$. Turėdami šiuos duomenis iš stačiojo trikampio AHB randame daikto aukštį: $AH=a\operatorname{tg}\alpha$.

Jei daikto pagrindas neprieinamas, galima daryti šitaip. Tiesėje, einančioje per daikto pagrindą H žinomu atstumu a vienas nuo kito pažymime taškus B ir C, išmatuojame kampus ABH ir ACB: $\angle ABH=\alpha$ ir $\angle ACB=\beta$ (žr. 295 pav.). Turėdami šiuos duomenis galime rasti visus trikampio ABC elementus, skyrium imant, AB. Įsitikinsime. Kampas ABH — trikampio ABC priekampis, todėl $\angle A=\alpha-\beta$. Remdamiesi sinusų teorema randame AB:

$$AB=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Iš stačiojo trikampio ABH randame daikto aukštį: $AH=$ $=AB\cdot\sin\alpha$. Taigi

$$AH=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

b) Atstumo iki neprieinamo taško radimas. Sakykime, reikia rasti atstumą d nuo punkto A iki neprieinamo punkto C (296 pav.). Priminsime, kad tokį uždavinį jau sprendėme, taikydami trikampių panašumo požymius. Dabar išnagrinėsime kitą uždavinio sprendimo būdą — taikant trigonometrijos formules.

Vietovėje pasirenkame tašką B ir išmatuojame atkarpos AB ilgį c. Po to išmatuojame (pavyzdžiui, su astroliabija) kampus A ir B: $\angle A=\alpha$ ir $\angle B=\beta$. Turėdami šiuos duomenis, t. y. c, α ir β, galime išspręsti trikampį ABC ir rasti ieškomąjį atstumą $d=AC$.

Pirmiausia randame $\angle C$ ir $\sin C$:

$$\angle C=180^\circ-\alpha-\beta;\quad \sin C=\sin(180^\circ-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta).$$

Po to, taikydami sinusų teoremą, randame d. Kadangi $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$, $AC=d$, $AB=c$, $\angle B=\beta$, tai $d=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Uždaviniai

1020. Raskite trikampio ABC plotą, kai: a) $AB=6\sqrt{8}$ cm, $AC=4$ cm, $\angle A=60°$; b) $BC=3$ cm, $AB=18\sqrt{2}$ cm, $\angle B=45°$; c) $AC=14$ cm, $CB=7$ cm, $\angle C=48°$.

1021. Įrodykite, kad lygiagretainio plotas lygus dviejų gretimų kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugai.

1022. Trikampio ABC plotas lygus 60 cm², $AC=15$ cm, $\angle A=30°$. Raskite kraštinę AB.

1023. Stačiakampio įstrižainė lygi 10 cm, o kampas tarp įstrižainių lygus 30°. Raskite stačiakampio plotą.

1024. Raskite trikampio ABC plotą, kai: a) $\angle A=\alpha$, o aukštinės, nuleistos iš viršūnių B ir C, lygios h_b ir h_c; b) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, o aukštinė, nuleista iš viršūnės B, lygi h.

1025. Taikydami sinusų ir kosinusų teoremas išspręskite trikampį ABC, kai:

a) $\angle A=60°$, $\angle B=40°$, $c=14$;
b) $\angle A=30°$, $\angle C=75°$, $b=4{,}5$;
c) $\angle A=80°$, $a=16$, $b=10$;
d) $\angle B=45°$, $\angle C=70°$, $a=24{,}6$;
e) $\angle A=60°$, $a=10$, $b=7$;
f) $a=6{,}3$, $b=6{,}3$, $\angle C=54°$;
g) $b=32$, $c=45$, $\angle A=87°$;
h) $a=14$, $b=18$, $c=20$;
i) $a=6$, $b=7{,}3$, $c=4{,}8$.

1026. Trikampio ABC $AC=12$ cm, $\angle A=75°$, $\angle C=60°$. Raskite AB ir S_{ABC}.

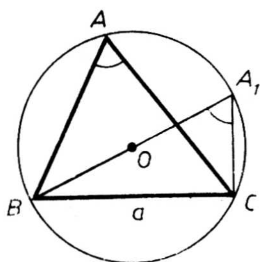
1027. Raskite trikampio ABC kraštines, kai $\angle A=45°$, $\angle C=30°$, o aukštinė AD lygi 3 m.

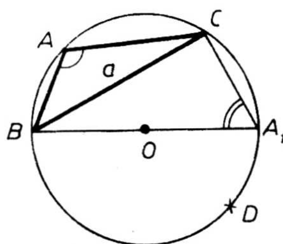
1028. Lygiagretainio $ABCD$ $AD=7\frac{1}{3}$ m, $BD=4{,}4$ m, $\angle A=22°30'$. Raskite $\angle BDC$ ir $\angle DBC$.

1029. Trikampio kraštinė lygi a, prie jos esantys kampai lygūs α ir β. Raskite trikampio pusiaukampines.

1030. Lygiagretainio gretimos kraštinės lygios a ir b, vienas kampas lygus α. Raskite lygiagretainio įstrižaines ir kampo tarp jų kosinusą.

1031. Išaiškinkite, koks trikampis (smailusis, statusis ar bukasis), kai jo kraštinės lygios: a) 5, 4 ir 4; b) 17, 8 ir 15; c) 9, 5 ir 6.





297 pav.

1032. Dvi vienodo didumo jėgos veikia tą patį tašką ir viena su kita sudaro 72° kampą. Atstojamosios jėgos didumas lygus 120 kg. Raskite minėtų jėgų didumą.

1033. Įrodykite, kad trikampio kraštinės ir prieš ją esančio kampo sinuso santykis lygus apie trikampį apibrėžto apskritimo skersmeniui.

S p r e n d i m a s. Sakykime, R — apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys. Įrodysime, kad $\frac{BC}{\sin A}=2R$, arba $BC=2R \sin A$.

Nubrėžkime skersmenį BA_1 (297 pav.) ir išnagrinėkime trikampį A_1BC (atvejį, kai taškai A_1 ir C sutampa, išnagrinėkite savarankiškai). To trikampio kampas C status, todėl $BC=BA_1 \sin A_1$. Tačiau $\sin A_1=\sin A$. Įsitikinsime. Jei taškas A_1 yra lanko BAC taškas (297 pav., *a*), tai $\angle A_1=\angle A$; jei taškas A_1 yra lanko BDC taškas (297 pav., *b*), tai $\angle A_1=180°-\angle A$. Abiem atvejais $\sin A_1=\sin A$. Vadinasi,

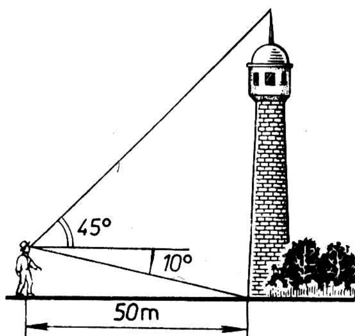
$$BC=BA_1 \sin A, \text{ arba } BC=2R \sin A.$$

1034. Lygiašonės trapecijos mažesnysis pagrindas lygus šoninei kraštinei, didesnysis pagrindas lygus 10 cm, o kampas prie pagrindo lygus 70°. Raskite trapecijos perimetrą.

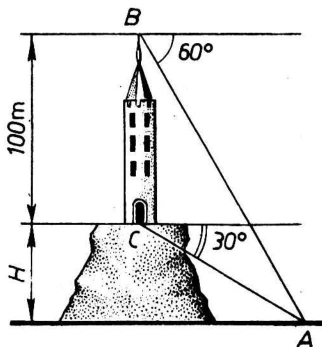
1035. Nubrėžtos apskritimo stygos AB ir CD. Jos susikerta taške E; $AB=13$ cm, $CE=9$ cm, $ED=4$ cm, atstumas tarp taškų B ir D lygus $4\sqrt{3}$ cm. Raskite smailųjį kampą tarp stygų.

1036. Stebėtojas yra 50 m atstumu nuo bokšto, kurio aukštį nori rasti (298 pav.). Bokšto pagrindą jis mato 10° kampu, o viršūnę — 45° kampu (nuo horizonto). Koks bokšto aukštis?

1037. Norėdami rasti upės plotį, upės krante pažymėjo du taškus A ir B 70 m atstumu vienas nuo kito, išmatavo kampus CAB ir ABC; čia C — kitame krante prie vandens augantis medis. Gauta: $\angle CAB=12°30'$, $\angle ABC=72°42'$. Koks upės plotis?



298 pav.

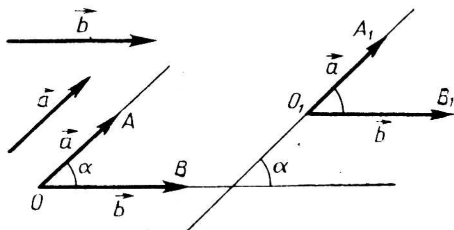


299 pav.

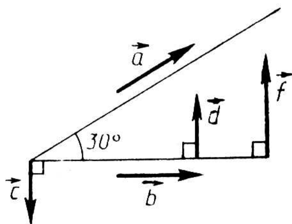
1038. Ant kalno stovi bokštas, kurio aukštis lygus 100 m (299 pav.). Kalno papėdėje esantis daiktas iš bokšto viršūnės B matomas 60° kampu, o iš jo pagrindo C – 30° kampu (nuo horizonto). Raskite kalno aukštį H.

§ 3. VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA

101. Kampas tarp vektorių. Nagrinėkime vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Nuo bet kurio taško O atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nevienakrypčiai, tai spinduliai OA ir OB sudaro kampą AOB (300 pav.). To kampo laipsninį matą pažymėkime raide α. Sakysime, kad *kampas tarp vektorių* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *lygus* α. Aišku, jog α yra tas pats, kad ir koks būtų taškas O, nuo kurio atidedami vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ (pasinaudodami 300 paveikslu, tai įrodykite). Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai, skyrium imant, vienas jų arba abu nuliniai, laikysime, kad kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0°. Kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ žymimas šitaip: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.



300 pav.



301 pav.

301 paveiksle kampai tarp vektorių šitokie: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=30°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=120°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{d}\vec{f}}=0°$, $\widehat{\vec{d}\vec{c}}=180°$.

Statmenais vektoriais vadinami du vektoriai, tarp kurių kampas lygus 90°. 301 paveiksle $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$.

102. Vektorių skaliarinė sandauga. Žinome, kaip vektoriai sudedami, kaip vektorius dauginamas iš skaičiaus. Apibrėšime dar vieną vektorių veiksmą — vektorių skaliarinę daugybą.

Dviejų vektorių skaliarine sandauga vadinama jų ilgių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandauga.

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga žymima šitaip: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ arba $\vec{a}\,\vec{b}$. Remiantis apibrėžimu,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}). \tag{1}$$

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni, t. y. $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=90°$, tai $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=0$, todėl $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Atvirkščiai: jei $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, o vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nenuliniai, tai iš (1) lygybės gauname $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=0$; vadinasi, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=90°$, t. y. vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni.

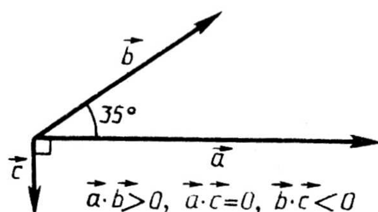
Taigi *nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui tada ir tik tada, kai tie vektoriai statmeni.*

Iš (1) formulės dar išplaukia, kad nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga teigiama (neigiama) tada ir tik tada, kai $\widehat{\vec{a}\vec{b}}<90°$ $(\widehat{\vec{a}\vec{b}}>90°)$.

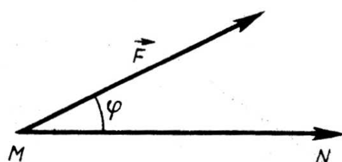
302 paveiksle $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=35°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}}=125°$, todėl $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}<0$.

Kai $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, iš (1) formulės gauname $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Skyrium imant, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Skaliarinė sandauga $\vec{a}\cdot\vec{a}$ vadinama vektoriaus $\vec{a}$ *skaliariniu kvadratu* ir žymima $\vec{a}^2$. Taigi *vektoriaus skaliarinis kvadratas lygus jo ilgio kvadratui.*

Vektorių skaliarinė sandauga dažnai taikoma fizikoje. Pavyzdžiui, iš mechanikos kurso žinoma, kad pastoviosios jėgos $\vec{F}$ darbas



302 pav.



303 pav.

A perkeliant kūną iš taško M į tašką N (303 pav.) lygus jėgos vektoriaus $\vec{F}$ bei poslinkio vektoriaus $\overrightarrow{MN}$ ilgių ir kampo tarp tų vektorių kosinuso sandaugai:

$$A=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{MN}|\cdot\cos\varphi.$$

Lygybės dešinioji pusė yra vektorių $\vec{F}$ ir $\overrightarrow{MN}$ skaliarinė sandauga, t. y. jėgos $\vec{F}$ darbas A lygus jėgos ir poslinkio vektorių skaliarinei sandaugai: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$.

103. Skaliarinės sandaugos reiškimas koordinatėmis. Dviejų vektorių skaliarinę sandaugą galima apskaičiuoti žinant tų vektorių koordinates.

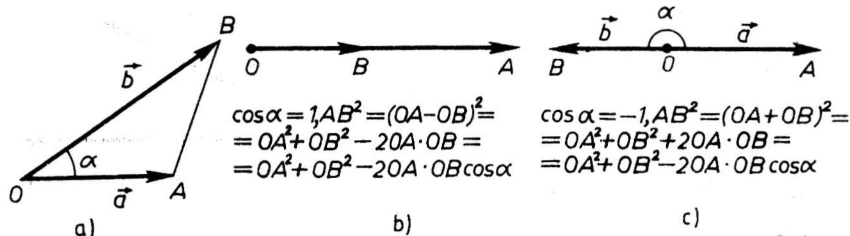
Teorema. ***Vektorių $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ skaliarinė sandauga išreiškiama formule***

$$\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2. \tag{2}$$

Įrodymas. Kai bent vienas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nulinis, aišku, kad (2) lygybė teisinga, nes nulinio vektoriaus koordinatės lygios nuliui. Išnagrinėsime atvejį, kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nenuliniai. Nuo bet kurio taško O atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs (304 pav., *a*), tai, remiantis kosinusų teorema,

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha. \tag{3}$$

Tokia lygybė teisinga ir tuo atveju, kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs (žr. 304 pav., *b*, *c*).



304 pav.

Kadangi $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, tai (3) lygybę galima užrašyti šitaip: $|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\,\vec{b}$. Iš čia

$$\vec{a}\,\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2\right). \qquad (4)$$

Vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{b}-\vec{a}$ koordinatės $\{x_1;\ y_1\}$, $\{x_2;\ y_2\}$ ir $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$, todėl

$$|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2,\quad |\vec{b}|^2=x_2^2+y_2^2,\quad |\vec{b}-\vec{a}|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Tas išraiškas įrašę į (4) lygybės dešiniąją pusę ir pertvarkę gauname (2) formulę. Teorema įrodyta.

1 išvada. *Nenuliniai vektoriai $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ statmeni tada ir tik tada, kai $x_1x_2+y_1y_2=0$.*

2 išvada. *Kampo α tarp nenulinių vektorių $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ kosinusas išreiškiamas formule*

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \qquad (5)$$

Įsitikinsime. Kadangi $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$, tai $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Įrašę $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ ir $|\vec{b}|$ išraiškas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koordinatėmis, gausime (5) formulę.

104. Vektorių skaliarinės daugybos savybės. Vektorių skaliarinei daugybai būdingos šios savybės.

Kad ir kokie būtų vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir skaičius k, teisingos lygybės:

1^0. $\vec{a}^2\geqslant 0$; *be to,* $\vec{a}^2>0$, *kai* $\vec{a}\neq\vec{0}$;

2^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (*perstatymo dėsnis*);

3^0. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (*skirstymo dėsnis*);

4^0. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (*jungimo dėsnis*).

1^0 savybė išplaukia iš formulės $\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|^2$, o 2^0 savybė — iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo. Įrodysime 3^0 ir 4^0 savybes.

Pasirinkime stačiakampę koordinačių sistemą, vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ koordinates pažymėkime šitaip: $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, $\vec{c}\{x_3;\ y_3\}$. Remdamiesi (2) formule gauname: $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(x_1+x_2)x_3+$ $+(y_1+y_2)y_3=(x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$. 3^0 savybė įrodyta.

Įrodysime 4^0 savybę. Vektoriaus $k\vec{a}$ koordinatės $\{kx_1;\ ky_1\}$, todėl $(k\vec{a})\vec{b}=(kx_1)x_2+(ky_1)y_2=k(x_1x_2+y_1y_2)=k(\vec{a}\,\vec{b})$.

P a s t a b a. Aišku, kad skirstymo dėsnį galima įrodyti ir tada, kai dėmenų yra daugiau. Pavyzdžiui,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}=\vec{a}\,\vec{d}+\vec{b}\,\vec{d}+\vec{c}\,\vec{d}.$$

Uždaviniai

1039. Kvadrato $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Raskite kampą tarp vektorių: a) $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$; b) $\vec{AB}$ ir $\vec{DA}$; c) $\vec{OA}$ ir $\vec{OB}$; d) $\vec{AO}$ ir $\vec{OB}$; e) $\vec{OA}$ ir $\vec{OC}$; f) $\vec{AC}$ ir $\vec{BD}$; g) $\vec{AD}$ ir $\vec{DB}$; h) $\vec{AO}$ ir $\vec{OC}$.

1040. Rombo $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O, įstrižainė BD lygi rombo kraštinei. Raskite kampą tarp vektorių: a) $\vec{AB}$ ir $\vec{AD}$; b) $\vec{AB}$ ir $\vec{DA}$; c) $\vec{BA}$ ir $\vec{AD}$; d) $\vec{OC}$ ir $\vec{OD}$; e) $\vec{AB}$ ir $\vec{DC}$; f) $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$.

1041. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, o kampas tarp jų lygus: a) 45°; b) 90°; c) 135°.

1042. Nubrėžta lygiakraščio trikampio ABC, kurio kraštinė a, aukštinė BD. Apskaičiuokite nurodytas vektorių skaliarines sandaugas: a) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$; b) $\vec{AC}\cdot\vec{CB}$; c) $\vec{AC}\cdot\vec{BD}$; d) $\vec{AC}\cdot\vec{AC}$.

1043. Tą patį tašką veikia jėgos $\vec{P}$ ir $\vec{Q}$, sudarančios viena su kita 120° kampą; $|\vec{P}|=8$, $|\vec{Q}|=15$. Raskite atstojamosios jėgos $\vec{R}$ didumą.

1044. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:

a) $\vec{a}\left\{\frac{1}{4}; -1\right\}$, $\vec{b}\{2; 3\}$; b) $\vec{a}\{-5; 6\}$, $\vec{b}\{6; 5\}$;

c) $\vec{a}\{1{,}5; 2\}$, $\vec{b}\{4; -0{,}5\}$.

1045. Įrodykite, kad nenuliniai vektoriai $\vec{a}\{x; y\}$ ir $\vec{b}\{-y; x\}$ vienas kitam statmeni.

1046. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{i}+\vec{j}$ ir $\vec{i}-\vec{j}$ vienas kitam statmeni; čia $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ — koordinatiniai vektoriai.

1047. Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienas kitam statmeni, kai: a) $\vec{a}\{4; 5\}$, $\vec{b}\{x; -6\}$; b) $\vec{a}\{x; -1\}$, $\vec{b}\{3; 2\}$; c) $\vec{a}\{0; -3\}$, $\vec{b}\{5; x\}$?

1048. Raskite trikampio, kurio viršūnės $A(2; 8)$, $B(-1; 5)$, $C(3; 1)$, kampų kosinusus.

1049. Raskite trikampio, kurio viršūnės $A(-1; \sqrt{3})$, $B(1; -\sqrt{3})$ ir $C\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$, kampus.

1050. Apskaičiuokite $|\vec{a}+\vec{b}|$ ir $|\vec{a}-\vec{b}|$, kai $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=60°$.

1051. Yra žinoma, kad $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=60°$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Apskaičiuokite $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

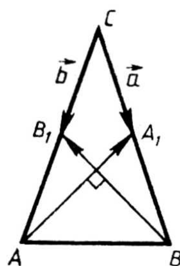
1052. Apskaičiuokite vektorių $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ ir $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ skaliarinę sandaugą, kai $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$ ir $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1053. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $\vec{a}= =3\vec{p}-2\vec{q}$ ir $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$; čia $\vec{p}$ ir $\vec{q}$ — vienetiniai vienas kitam statmeni vektoriai.

Uždaviniai, kurie sprendžiami taikant vektorių skaliarinę sandaugą

1054. Įrodykite, kad $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$; čia AM — trikampio ABC pusiaukraštinė. Remdamiesi ta formule įrodykite, kad lygiašonio trikampio pusiaukraštinės, nubrėžtos į šonines kraštines, lygios.

Sprendimas. Taškas M — atkarpos BC vidurys, todėl $2\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{AC}$. Iš čia gauname



305 pav.

$$(2\vec{AM})(2\vec{AM})=(\vec{AB}+\vec{AC})(\vec{AB}+\vec{AC})=$$
$$=\vec{AB}\cdot\vec{AB}+2\vec{AB}\cdot\vec{AC}+\vec{AC}\cdot\vec{AC}=$$
$$=AB^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A+AC^2,$$
arba $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Antrąjį uždavinio sąlygoje suformuluotą teiginį įrodykite savarankiškai.

1055. Pusiaukraštinės, nubrėžtos į lygiašonio trikampio šonines kraštines, viena kitai statmenos. Raskite prieš pagrindą esantį kampą.

Sprendimas. Sakykime, ABC — lygiašonis trikampis, kurio pagrindas AB ir AA_1, BB_1 — jo pusiaukraštinės, nubrėžtos į šonines kraštines (305 pav.). Pažymėkime: $\vec{CA_1}=\vec{a}$, $\vec{CB_1}=\vec{b}$, $CA_1=CB_1=a$. Tada $\vec{AA_1}=\vec{CA_1}-\vec{CA}=$ $=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{BB_1}=\vec{CB_1}-\vec{CB}=\vec{b}-2\vec{a}$, todėl

$$\vec{AA_1}\cdot\vec{BB_1}=(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}-2\vec{a})=5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}. \qquad (1)$$

Remiantis uždavinio sąlyga, $AA_1\perp BB_1$, todėl $\vec{AA_1}\cdot\vec{BB_1}=$ $=0$. Kadangi $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2\cos C$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=a^2$, tai iš (1) lygybės gauname lygybę $0=5a^2\cos C-4a^2$. Iš čia randame $\cos C=\frac{4}{5}$, todėl $\angle C\approx 36°52'$.

1056. Įrodykite, kad rombo įstrižainės viena kitai statmenos.

XI SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Nubrėžkite koordinačių ašis ir vienetinį pusapskritimį.
2. Paaiškinkite, kas yra kampo α ($0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$) sinusas ir kosinusas.
3. Ką vadiname kampo α tangentu? Su kuria α reikšme tangentas neapibrėžtas ir kodėl?
4. Įrodykite pagrindinę trigonometrijos tapatybę.
5. Parašykite redukcijos formules.
6. Išveskite formules taško A, kurio ordinatė neneigiama, koordinatėms išreikšti atkarpos OA ilgiu ir kampu tarp spindulio OA ir teigiamosios pusašės Ox.
7. Suformuluokite ir įrodykite trikampio ploto teoremą (trikampio ploto reiškimas dviem kraštinėmis ir kampu tarp jų).
8. Suformuluokite ir įrodykite sinusų teoremą.
9. Suformuluokite ir įrodykite kosinusų teoremą.
10. Ką reiškia žodžiai „trikampio sprendimas"? Suformuluokite tris pagrindinius trikampio sprendimo uždavinius ir paaiškinkite, kaip jie sprendžiami.

11. Paaiškinkite, kaip galima rasti daikto, kurio pagrindas neprieinamas, aukštį.
12. Paaiškinkite, kaip galima rasti atstumą iki neprieinamo taško.
13. Paaiškinkite, ką reiškia pasakymas „kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus α". Kokiu atveju laikoma, kad kampas tarp vektorių lygus 0°?
14. Kokie du vektoriai vadinami statmenais?
15. Kas yra dviejų vektorių skaliarinė sandauga?
16. Kuriuo atveju nenulinių vektorių skaliarinė sandauga: a) lygi nuliui; b) didesnė už nulį; c) mažesnė už nulį?
17. Išveskite formulę vektorių skaliarinei sandaugai reikšti jų koordinatėmis.
18. Parašykite dviejų nenulinių vektorių, kurių koordinatės $\{x_1;\ y_1\}$ ir $\{x_2;\ y_2\}$, statmenumo sąlygą.
19. Išveskite formulę kampo tarp nenulinių vektorių kosinusui reikšti jų koordinatėmis.
20. Suformuluokite ir įrodykite vektorių skaliarinės daugybos savybes.
21. Pateikite vektorių skaliarinės sandaugos taikymo sprendžiant geometrijos uždavinius pavyzdį.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

1057. Lygiašonio trikampio ABC $AB=AC=b$, $\angle A=30°$. Raskite aukštines BE ir AD bei atkarpas AE, EC, BC.

1058. Raskite trikampio plotą, kai: a) $BC=4{,}125$ m, $\angle B=44°$, $\angle C=72°$; b) $BC=4100$ m, $\angle A=32°$, $\angle C=120°$.

1059. Įrodykite, kad iškilojo keturkampio plotas lygus jo įstrižainių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.

1060. Taikydami sinusų teoremą išspręskite trikampį ABC, kai: a) $AB=8$ cm, $\angle A=30°$, $\angle B=45°$; b) $AB=5$ cm, $\angle B=45°$, $\angle C=60°$; c) $AB=3$ cm, $BC=3{,}3$ cm, $\angle A=48°30'$; d) $AC=10{,}4$ cm, $BC=5{,}2$ cm, $\angle B=62°48'$.

1061. Taikydami kosinusų teoremą išspręskite trikampį ABC, kai: a) $AB=5$ cm, $AC=7{,}5$ cm, $\angle A=135°$; b) $AB=2\sqrt{2}$ dm, $BC=3$ dm, $\angle B=45°$; c) $AC=0{,}6$ m, $BC=\frac{\sqrt{3}}{4}$ dm, $\angle C=150°$.

1062. Trikampio DEF kraštinės $DE=4{,}5$ dm, $EF=9{,}9$ dm, $DF=70$ cm. Raskite trikampio kampus.

1063. Raskite trikampio ABC pusiaukampinę AD, kai $\angle A=\alpha$, $AB=c$, $AC=b$.

1064. Norint rasti atstumą tarp taškų A ir B, kurio išmatuoti negalima, parenkamas trečias taškas C, iš kurio matomas ir taškas A, ir taškas B. Išmatavus kampą ACB bei atstumus

AC ir CB, randamas atstumas AB. Apskaičiuokite AB, kai $AC=b$, $CB=a$, $\angle ACB=\alpha$.

1065. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės $A(3;\ 0)$, $B(1;\ 5)$ ir $C(2;\ 1)$, — bukasis. Raskite bukojo kampo kosinusą.

1066. Raskite vektoriaus $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$ ilgį; čia $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ — koordinatiniai vektoriai.

1067. Lygiagretainio kraštinės yra vektoriai $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ ir $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$, $\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}=45°$. Raskite lygiagretainio įstrižaines.

1068. Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{p}=x\vec{a}+17\vec{b}$ ir $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ ($|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=120°$) vienas kitam statmeni?

1069. Iš stačiojo lygiašonio trikampio smailiųjų kampų viršūnių nubrėžtos pusiaukraštinės. Raskite smailųjį kampą tarp jų.

Su programuojamaisiais skaičiuotuvais MK-54 — MK-57 spręstini uždaviniai

1070. Duotos trikampio kraštinės a ir b bei kampas tarp jų C. Sudarykite trikampio sprendimo programą, pagal ją apskaičiuokite, kai: a) $a=2$, $b=3$, $\angle C=70°$; b) $a=5$, $b=6$, $\angle C=100°$.

Sprendimas. a, b, $\angle C$ reikšmes įrašome į Ra, Rb, R1. Kraštinę c apskaičiuojame pagal formulę

$$c=\sqrt{-2ab\cos C+a^2+b^2}$$

(00—15 programos adresai), rezultatą įrašome į Rc (16 adresas). Kampui A apskaičiuoti taikome formulę

$$\cos C=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$

(17—30 adresai), rezultatą įrašome į R2 (31 adresas). Kampą B apskaičiuojame pagal formulę

$$\angle B=-\angle A+180°-\angle C$$

(32—38 adresai) ir baigiame apskaičiavimus (39 adresas).

Programą įrašant į skaičiuotuvą ir apskaičiuojant pagal ją skaičiuotuvas turi dirbti laipsnių režimu (perjungiklio Р/ГРД/Г dešinioji padėtis). Įjungiame skaičiuotuvą, režimu „Programavimas“: [F] [ПРГ] įvedame programą ir pereiname į automatinį režimą: [F] [АВТ] Apskaičiuojame panaudodami uždavinio sąlygoje pateiktus duomenis.

a) Reikšmes $a=2$, $b=3$, $\angle C=70°$ įrašome į Ra, Rb, R1 ir paleidžiame programą:

2 [x→П] [a] 3 [x→П] [b] 70 [x→П] [1] [В/О] [С/П]

Indikatoriuje matome kampo B reikšmę laipsniais: 70,94091. Suapvalinę iki tūkstantųjų gauname $\angle B \approx 70{,}941°$. Kraštinės c ir kampo A reikšmės yra registruose Rc ir R2:

[П→x] [c] 2,9825757; [П→x] [2] 39,059093,

t. y. $c \approx 2{,}98$, $\angle A \approx 39{,}059°$.

b) 5 [x→П] [a] 6 [x→П] [b] 100 [x→П] [1] [В/О]

[С/П] 44,36218;

[П→x] [c] 8,4509697; [П→x] [2] 35,637825,

t. y. $\angle B \approx 44{,}362°$, $c \approx 8{,}45$, $\angle A \approx 35{,}638°$.

1071. Sudarykite trikampio sprendimo programą, kai duota trikampio kraštinė a bei prie jos esantys kampai B ir C. Apskaičiuokite pagal tą programą, kai: a) $a=5$, $\angle B=13°$, $\angle C=68°$; b) $a=2{,}75$, $\angle B=43{,}25°$, $\angle C=71{,}36°$.

1072. Sudarykite trikampio sprendimo programą, kai duotos kraštinės a, b, c. Apskaičiuokite pagal tą programą, kai: a) $a=6$, $b=7$, $c=8$; b) $a=2{,}37$, $b=5{,}46$, $c=4{,}89$.

1073. Sudarykite stačiojo trikampio sprendimo programą, kai duoti statiniai a ir b. Apskaičiuokite pagal tą programą, kai: a) $a=3$, $b=4$; b) $a=125{,}3$, $b=57{,}5$.

1074. Sudarykite stačiojo trikampio sprendimo programą, kai duotas statinis a ir įžambinė c. Apskaičiuokite pagal tą programą, kai: a) $a=61{,}3$, $c=85{,}6$; b) $a=3{,}72$, $c=11{,}25$.

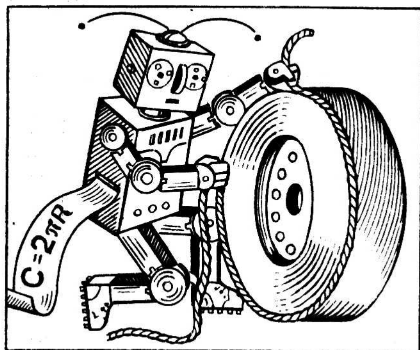
1075. Sudarykite stačiojo trikampio sprendimo programą, kai duotas statinis a ir prie jo esantis smailusis kampas B. Apskaičiuokite pagal tą programą, kai: a) $a=6$, $\angle B=70°$; b) $a=16{,}35$, $\angle B=40{,}27°$.

1076. Sudarykite stačiojo trikampio sprendimo programą, kai duotas statinis a ir prieš jį esantis kampas A. Apskaičiuokite pagal tą programą, kai: a) $a=6$, $\angle A=20°$; b) $a=25{,}62$, $\angle A=37{,}14°$.

1077. Sudarykite stačiojo trikampio sprendimo programą, kai duota įžambinė c ir smailusis kampas A. Apskaičiuokite pagal tą programą, kai: a) $c=20$, $\angle A=50°$; b) $c=15{,}63$, $\angle A=27{,}39°$.

Adresas	Klavišai	Kodas
00	П→x a	6—
01	П→x b	6L
02	×	12
03	П→x 1	61
04	F cos	1Г
05	×	12
06	2	02
07	×	12
08	/-/	0L
09	П→x a	6—
10	F x^2	22
11	+	10
12	П→x b	6L
13	F x^2	22
14	+	10
15	F √	21
16	x→П c	4Е
17	F x^2	22
18	П→x b	6L
19	F x^2	22

Adresas	Klavišai	Kodas
20	+	10
21	П→x a	6—
22	F x^2	22
23	—	11
24	2	02
25	÷	13
26	П→x b	6L
27	÷	13
28	П→x c	6Е
29	÷	13
30	F $\cos^{-1}$	1—
31	x→П 2	42
32	/-/	0L
33	1	01
34	8	08
35	0	00
36	+	10
37	П→x 1	61
38	—	11
39	С/П	50



XII skyrius

APSKRITIMO ILGIS IR SKRITULIO PLOTAS

§ 1. TAISYKLINGIEJI DAUGIAKAMPIAI

105. Taisyklingasis daugiakampis. *Taisyklìnguoju daugiãkampiu* vadinamas iškilasis daugiakampis, kurio visi kampai lygūs ir visos kraštinės lygios.

Taisyklingųjų daugiakampių pavyzdžiai yra lygiakraštis trikampis ir kvadratas. 306 paveiksle pavaizduoti taisyklìngasis penkiãkampis, taisyklìngasis septýnkampis ir taisyklìngasis aštúonkampis.

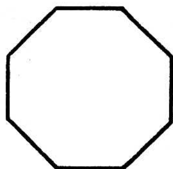
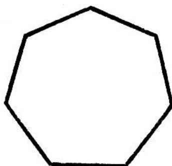
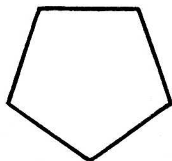
Išvesime formulę taisyklingojo n-kam̃pio kampui α_n apskaičiuoti. Tokio n-kampio visų kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180°$, visi kampai lygūs, todėl

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

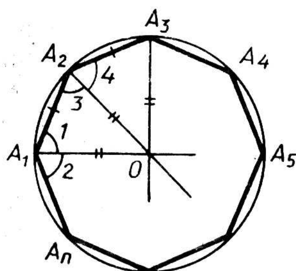
106. Apie taisyklingąjį daugiakampį apibrėžtas apskritimas. Priminsime, kad apskritimas vadinamas apie daugiakampį apibrėžtu apskritimu, kai visos daugiakampio viršūnės yra to apskritimo taškai. Įrodysime apie taisyklingąjį daugiakampį apibrėžto apskritimo teoremą.

T e o r e m a. ***Apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą, tačiau tik vieną.***

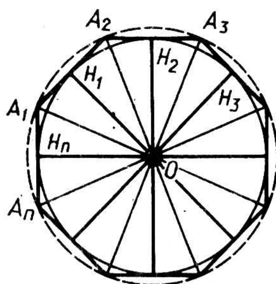
Į r o d y m a s. Sakykime, $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — taisyklingasis daugiakampis, O — kampų A_1 ir A_2 pusiaukampinių susikirtimo taškas (307 pav.).

306 pav.



307 pav.



308 pav.

Tašką O atkarpomis sujunkime su kitomis daugiakampio viršūnėmis. Įrodysime, kad $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$. Kadangi $\angle A_1=\angle A_2$, tai $\angle 1=\angle 3$. Vadinasi, trikampis A_1A_2O — lygiašonis, todėl $OA_1=OA_2$. Trikampiai A_1A_2O ir A_3A_2O lygūs (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų: $A_1A_2=A_3A_2$, A_2O — bendra kraštinė ir $\angle 3=\angle 4$), todėl $OA_3=OA_1$. Taip pat galima įrodyti, kad $OA_4=OA_2$, $OA_5=OA_3$ ir t. t.

Taigi $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$, t. y. taškas O vienodai nutolęs nuo visų daugiakampio viršūnių. Iš to išplaukia, kad apskritimas, kurio centras O ir spindulys OA_1, yra apibrėžtas apie daugiakampį.

Dabar įrodysime, kad yra tik vienas apibrėžtinis apskritimas. Pasirinkime kurias nors tris daugiakampio viršūnes, pavyzdžiui, A_1, A_2, A_3. Kadangi per tuos taškus eina tik vienas apskritimas, tai apie daugiakampį $A_1A_2\ldots A_n$ galima apibrėžti tik vieną apskritimą. Teorema įrodyta.

107. Į taisyklingąjį daugiakampį įbrėžtas apskritimas. Priminsime, kad apskritimas vadinamas į daugiakampį įbrėžtu apskritimu, kai visos daugiakampio kraštinės liečia tą apskritimą. Įrodysime į taisyklingąjį daugiakampį įbrėžto apskritimo teoremą.

Teorema. ***Į kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti apskritimą, tačiau tik vieną.***

Įrodymas. Sakykime, $A_1A_2\ldots A_n$ — taisyklingasis daugiakampis, O — apibrėžtinio apskritimo centras (308 pav.). Įrodydami ankstesnę teoremą įsitikinome, kad $\triangle OA_1A_2=\triangle OA_2A_3=\ldots=\triangle OA_nA_1$, todėl tų trikampių aukštinės, nuleistos iš viršūnės O, irgi lygios: $OH_1=OH_2=\ldots=OH_n$. Iš to išplaukia, kad apskritimas, kurio centras O ir spindulys OH_1, eina per taškus H_1, H_2, $\ldots$, H_n ir tuose taškuose liečia daugiakampio kraštines. Taigi tas apskritimas yra į nagrinėjamą taisyklingąjį daugiakampį įbrėžtas apskritimas.

Dabar įrodysime, kad yra tik vienas įbrėžtinis apskritimas.

Tarkime, kad be apskritimo, kurio centras O ir spindulys OH_1, yra kitas į daugiakampį $A_1A_2\ldots A_n$ įbrėžtas apskritimas. Tada

jo centras O_1 vienodai nutolęs nuo daugiakampio kraštinių, t. y. taškas O_1 yra daugiakampio kiekvieno kampo pusiaukampinėje, taigi sutampa su tų pusiaukampinių susikirtimo tašku O. To apskritimo spindulys lygus atstumui nuo taško O iki daugiakampio kraštinių, t. y. lygus OH_1. Vadinasi, antrasis apskritimas sutampa su pirmuoju. Teorema įrodyta.

1 išvada. *Į taisyklingąjį daugiakampį įbrėžto apskritimo ir daugiakampio kraštinių lietimosi taškai yra kraštinių vidurio taškai.*

2 išvada. *Apie taisyklingąjį daugiakampį apibrėžto apskritimo centras sutampa su į tą daugiakampį įbrėžto apskritimo centru.*

Tas taškas vadinamas *taisyklingojo daugiãkampio centrù.*

108. Taisyklingojo daugiakampio ploto, kraštinės ir įbrėžtinio apskritimo spindulio formulės. Sakykime, S — taisyklingojo n-kampio plotas, a_n — jo kraštinė, P — perimetras, r ir R — įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai. Pirmiausia įrodysime, kad

$$S=\frac{1}{2}Pr. \qquad (1)$$

Daugiakampio centrą sujunkime su jo viršūnėmis (žr. 308 pav.). Tada daugiakampis bus padalytas į n lygių trikampių, kurių kiekvieno plotas lygus $\frac{1}{2}a_n r$. Vadinasi,

$$S=n\cdot\frac{1}{2}a_n r=\frac{1}{2}(na_n)r=\frac{1}{2}Pr.$$

Dabar išvesime šias formules:

$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \qquad (2)$$

$$r=R\cos\frac{180^\circ}{n}. \qquad (3)$$

Stačiojo trikampio A_1H_1O (žr. 308 pav.) $\angle A_1=\frac{a_n}{2}=\frac{n-2}{2n}\times$ $\times 180^\circ=90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$. Vadinasi, $a_n=2A_1H_1=2R\cos\left(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)=$ $=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, o $r=OH_1=R\sin\left(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)=R\cos\frac{180^\circ}{n}$.

Į (2) formulę įrašę $n=3$, 4 ir 6, gauname taisyklingojo trikampio, kvadrato ir taisyklingojo šešiakampio kraštinių išraiškas:

$$a_3=2R\sin\frac{180^\circ}{3}=2R\sin 60^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}; \qquad (4)$$

$$a_4=2R\sin\frac{180^\circ}{4}=2R\sin 45^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=R\sqrt{2}; \qquad (5)$$

$$a_6=2R\sin\frac{180^\circ}{6}=2R\sin 30^\circ=2R\cdot\frac{1}{2}=R. \qquad (6)$$

109. Taisyklingųjų daugiakampių braižymas. Išnagrinėsime kai kurių taisyklingųjų daugiakampių braižymo skriestuvu ir liniuote būdus. Taisyklingojo trikampio ir taisyklingojo keturkampio, t. y. kvadrato, braižymą jau išnagrinėjome. Braižant taisyklinguosius n-kampius ($n>4$) dažnai pasinaudojama apie daugiakampį apibrėžtu apskritimu.

1 uždavinys. *Reikia nubraižyti taisyklingąjį šešiakampį, kurio kraštinė lygi duotai atkarpai.*

Sprendimas. Spręsdami uždavinį remsimės (6) formule. Sakykime, PQ — duota atkarpa. Nubrėžkime apskritimą, kurio spindulys PQ. Pažymėkime bet kurį jo tašką A_1 (309 pav.). Po to, nepraskėtę ir nesuglaudę skriestuvo, pažymėkime to apskritimo taškus A_2, A_3, A_4, A_5, A_6; čia $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6$. Pažymėtus taškus paeiliui sujungę atkarpomis gauname ieškomą taisyklingąjį šešiakampį $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Braižant taisyklinguosius daugiakampius dažnai praverčia šitoks uždavinys.

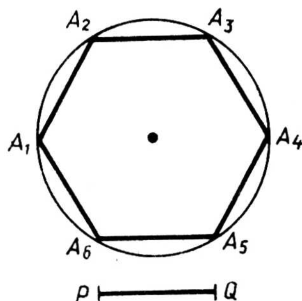
2 uždavinys. *Duotas taisyklingasis n-kampis. Reikia nubraižyti taisyklingąjį 2n-kampį.*

Sprendimas. Sakykime, $A_1A_2...A_n$ — duotas taisyklingasis n-kampis. Apie jį apibrėžkime apskritimą. Tam nubrėžkime kampų A_1 ir A_2 pusiaukampines, jų susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Po to brėžkime apskritimą, kurio centras O, spindulys OA_1 (žr. 307 pav.).

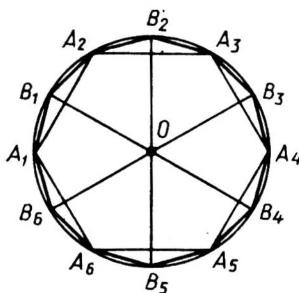
Norint išspręsti uždavinį, pakanka lankus A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 padalyti pusiau ir kiekvieną iš dalijimo taškų B_1, B_2, ..., B_n atkarpomis sujungti su atitinkamo lanko galais (310 pav.; čia $n=6$). Taškus B_1, B_2, ..., B_n rasti galima ir taip: brėžti turimo n-kampio kraštinių vidurio statmenis.

310 paveiksle taip nubraižytas taisyklingasis dvylikakampis $A_1B_1A_2B_2...A_6B_6$.

Taip skriestuvu ir liniuote galima nubraižyti nemaža taisyklingųjų daugiakampių, kai vienas jau nubraižytas. Pavyzdžiui, nubraižius taisyklingąjį keturkampį, t. y. kvadratą, remiantis 2 uždaviniu galima nubraižyti taisyklingąjį aštuonkampį, po to tai-



309 pav.



310 pav.

syklingąjį šešiolikakampį, apskritai, taisyklingąjį 2^k-kampį; čia k — bet kuris sveikasis skaičius, didesnis už du.

P a s t a b a. Matome, kad nemaža taisyklingųjų daugiakampių galima nubraižyti skriestuvu ir liniuote, tačiau ne kiekvieną. Pavyzdžiui, įrodyta, kad taisyklingojo septynkampio negalima nubraižyti skriestuvu ir liniuote. Įdomu, kad taisyklingąjį septyniolikakampį skriestuvu ir liniuote nubraižyti galima.

Klausimai ir uždaviniai

1078. Ar teisingas teiginys: a) kiekvienas taisyklingasis daugiakampis yra iškilasis daugiakampis; b) kiekvienas iškilasis daugiakampis yra taisyklingasis daugiakampis? Atsakymą pagrįskite.

1079. Kurie teiginiai teisingi: a) daugiakampis taisyklingas, kai jis iškilas ir visos jo kraštinės lygios; b) trikampis taisyklingas, kai visi jo kampai lygūs; c) kiekvienas lygiakraštis trikampis taisyklingas; d) kiekvienas keturkampis, kurio kraštinės lygios, taisyklingas? Atsakymą pagrįskite.

1080. Įrodykite, kad kiekvienas taisyklingasis keturkampis yra kvadratas.

1081. Raskite taisyklingojo n-kampio kampus, kai: a) $n=3$; b) $n=5$; c) $n=6$; d) $n=10$; e) $n=18$.

1082. Raskite taisyklingojo n-kampio priekampių, paimtų po vieną prie kiekvienos viršūnės, sumą.

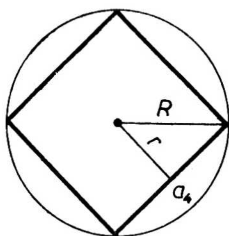
1083. Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio kiekvienas kampas lygus: a) 60°; b) 90°; c) 135°; d) 150°?

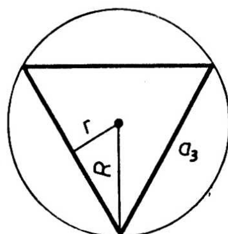
1084. Kiek kraštinių turi taisyklingasis įbrėžtinis daugiakampis, kai apibrėžtinio apskritimo lankas, kurio galus jungia daugiakampio kraštinė, lygus: a) 60°; b) 30°; c) 90°; d) 36°; e) 18°; f) 72°?

1085. Įrodykite, kad taisyklingojo daugiakampio bet kurių dviejų kraštinių vidurio statmenys arba susikerta, arba sutampa.

1086. Įrodykite, kad tiesės, kuriose yra taisyklingojo daugiakampio bet kurių dviejų kampų pusiaukampinės, arba susikerta, arba sutampa.

1087. 311 paveiksle, a, pavaizduotas į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžtas kvadratas. Lentelę persibraižykite į sąsiuvinį ir užpildykite tuščius langelius (a_4 — kvadrato kraštinė, P — perimetras, S — plotas, r — įbrėžtinio apskritimo spindulys).





311 pav.

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

1088. 311 paveiksle, *b*, pavaizduotas į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Lentelę persibraižykite į sąsiuvinį ir užpildykite tuščius langelius (a_3 — trikampio kraštinė, P — perimetras, S — plotas, r — įbrėžtinio apskritimo spindulys).

N	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

1089. Į apskritimą įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Jo perimetras lygus 18 cm. Raskite į tą apskritimą įbrėžto kvadrato kraštinę.

1090. Dujų sklendės galvutės pjūvis yra taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė lygi 3 cm. Kokio mažiausio skersmens apvalų geležinį strypą reikia parinkti, kad iš jo būtų galima pagaminti tokią sklendę?

1091. Medinio strypelio skerspjūvis yra kvadratas, kurio kraštinė 6 cm. Kokio didžiausio skersmens apvalų strypelį galima iš jo ištekinti?

1092. Apie apskritimą apibrėžtas kvadratas ir taisyklingasis šešiakampis. Šešiakampio perimetras lygus 48 cm. Apskaičiuokite kvadrato perimetrą.

1093. Apie taisyklingąjį trikampį apibrėžtas apskritimas. Jo spindulys R. Įrodykite, kad $R=2r$; čia r — į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulys.

1094. Raskite taisyklingojo n-kampio plotą S, kai: a) $n=4$, $R=3\sqrt{2}$ cm; b) $n=3$, $P=24$ cm; c) $n=6$, $r=9$ cm; d) $n=8$, $r=5\sqrt{3}$ cm.

1095. Varžto galvutės pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis. Atstumas tarp galvutės lygiagrečių sienų lygus 1,5 cm. Raskite galvutės pagrindo plotą.

1096. Taisyklingojo trikampio, kvadrato ir taisyklingojo šešiakampio kraštinės lygios. Raskite tų daugiakampių plotų santykį.

1097. Vienas taisyklingasis šešiakampis įbrėžtas į apskritimą, kitas — apibrėžtas apie tą apskritimą. Raskite tų šešiakampių plotų santykį.

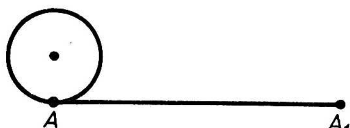
1098. Taisyklingojo trikampio kraštinę, perimetrą ir plotą išreikškite: a) įbrėžtinio apskritimo spinduliu; b) apibrėžtinio apskritimo spinduliu.

1099. Taisyklingasis aštuonkampis $A_1A_2...A_8$ įbrėžtas į apskritimą, kurio spindulys R. Įrodykite, kad keturkampis $A_3A_4A_7A_8$ — stačiakampis. Jo plotą išreikškite spinduliu R.

1100. Skriestuvu ir liniuote į apskritimą įbrėžkite: a) taisyklingąjį šešiakampį; b) taisyklingąjį trikampį; c) kvadratą; d) taisyklingąjį aštuonkampį.

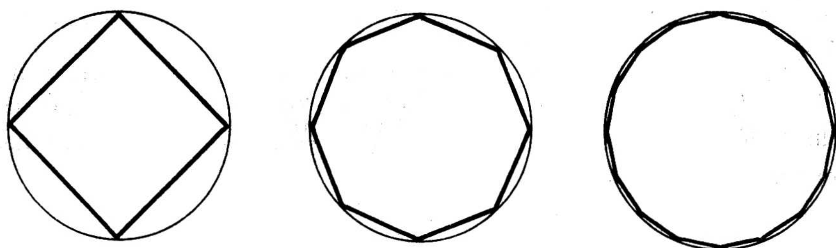
§ 2. APSKRITIMO ILGIS IR SKRITULIO PLOTAS

110. Apskritimo ilgis. Norėdami įsivaizduoti apskritimo ilgį, įsivaizduokime, kad apskritimas padarytas iš plono netampaus siūlo. Jei siūlą kuriame nors taške A perkirpsime ir ištiesime, tai gausime atkarpą AA_1, kurios ilgis ir yra apskritimo ilgis (312 pav.).



312 pav.

Kiekvieno į apskritimą įbrėžto taisyklingojo daugiakampio perimetras yra apskritimo ilgio apytikslė reikšmė. Kuo didesnis tokio daugia-



313 pav.

kampio kraštinių skaičius, tuo tikslesnė ta apytikslė reikšmė, nes, didėjant kraštinių skaičiui, daugiakampis vis labiau „priglunda“ prie apskritimo (313 pav.). Apskritimo ilgio tiksli reikšmė — riba, prie kurios artėja į apskritimą įbrėžto taisyklingojo daugiakampio perimetras, kai jo kraštinių skaičius neribotai didėja.

Išvesime formulę, kuria apskritimo ilgis išreiškiamas jo spinduliu. Sakykime, C ir C' — apskritimų, kurių spinduliai R ir R', ilgiai. Į kiekvieną jų įbrėžkime taisyklingąjį n-kampį. Jų perimetrus pažymėkime P_n ir P'_n, o kraštines a_n ir a'_n. Pagal 1-ojo paragrafo (2) formulę:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n}, \quad P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Vadinasi,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

Gautoji lygybė teisinga su kiekviena n reikšme. Skaičių n neribotai didinkime. Kadangi $P_n \to C$, $P'_n \to C'$, kai $n \to \infty$, tai santykio $\frac{P_n}{P'_n}$ riba lygi $\frac{C}{C'}$. Antra vertus, remiantis (1) lygybe, ta riba lygi $\frac{2R}{2R'}$. Taigi $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. Iš čia išplaukia, kad $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$; t. y. *apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis yra tas pats, kad ir kokie būtų apskritimai.* Tas santykis žymimas graikiška raide π (skaitoma „pi“).

Iš lygybės $\frac{C}{2R} = \pi$ gauname formulę apskritimo, kurio spindulys R, ilgiui apskaičiuoti:

$$C = 2\pi R.$$

Įrodyta, kad π yra begalinė neperiodinė dešimtainė trupmena, t. y. iracionalusis skaičius. Racionalusis skaičius $\frac{22}{7}$ yra skaičiaus π apytikslė reikšmė 0,002 tikslumu. Tokią apytikslę reikšmę jau III a. pr. Kr. nustatė žymusis graikų mokslininkas Archimedas

das. Sprendžiant uždavinius paprastai tenkinamasi apytiksle π reikšme 0,01 tikslumu: $\pi=3{,}14$.

Dabar išvesime formulę apskritimo lanko, kurio laipsninis matas α, ilgiui l apskaičiuoti. Kadangi viso apskritimo ilgis lygus $2\pi R$, tai 1° lanko ilgis lygus $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$, o ilgis l išreiškiamas formule

$$l=\frac{\pi R}{180}\alpha.$$

111. Skritulio plotas. Priminsime, kad skrituliu vadinama plokštumos dalis, kurią riboja apskritimas. Skritulį, kurio spindulys R ir centras O, sudaro taškas O ir visi plokštumos taškai, nuo taško O nutolę atstumu, ne didesniu už R.

Išvesime formulę skritulio, kurio spindulys R, plotui apskaičiuoti. Tam išnagrinėkime į skritulį ribojantį apskritimą įbrėžtą taisyklingąjį n-kampį $A_1A_2...A_n$ (314 pav.). Akivaizdu, kad skritulio plotas S didesnis už daugiakampio $A_1A_2...A_n$ plotą S_n, nes tas daugiakampis išsitenka nagrinėjamame skritulyje. Antra vertus, į daugiakampį įbrėžto skritulio plotas S'_n mažesnis už S_n, nes tas skritulys išsitenka daugiakampyje. Taigi

$$S'_n<S_n<S. \qquad (2)$$

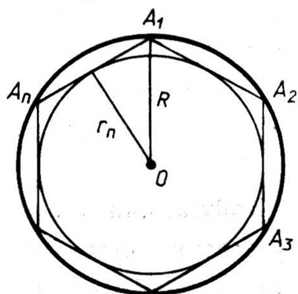
Daugiakampio kraštinių skaičių neribotai didinkime. Remdamiesi 1-ojo paragrafo (3) formule, turime $r_n=R\cos\frac{180°}{n}$; čia r_n — į daugiakampį įbrėžto apskritimo spindulys. Kai $n\to\infty$, $\cos\frac{180°}{n}\to$ $\to 1$, todėl $r_n\to R$. Kitais žodžiais, daugiakampio kraštinių skaičiui neribotai didėjant, į jį įbrėžtas apskritimas „artėja“ prie apie jį apibrėžto apskritimo, todėl $S'_n\to S$, kai $n\to\infty$. Iš čia ir iš (2) nelygybės išplaukia, kad $S_n\to S$, kai $n\to\infty$.

Remiantis 1-ojo paragrafo (1) formule, $S_n=\frac{1}{2}P_nr_n$; čia P_n — daugiakampio $A_1A_2...A_n$ perimetras. Atsižvelgę į tai, kad $r_n\to R$, $P_n\to 2\pi R$, $S_n\to S$, kai $n\to\infty$, gauname $S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R=\pi R^2$.

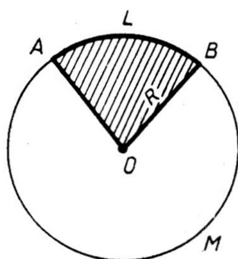
Taigi skritulio, kurio spindulys R, plotui apskaičiuoti gavome formulę

$$S=\pi R^2.$$

P a s t a b a. Daug šimtmečių daugelis matematikų stengėsi išspręsti uždavinį, kuris vadinamas *skritulio kvadratūros uždaviniu:* skriestuvu ir liniuote reikia nubraižyti kvadratą, kurio plotas būtų lygus duoto skritulio plotui. Tik praeito šimtmečio gale buvo įrodyta, kad tai padaryti negalima.



314 pav.



315 pav.

112. Skritulio išpjovos plotas. *Skrìtulio ìšpjova* (trumpiau — *ìšpjova*) vadinama skritulio dalis, kurią riboja lankas ir du spinduliai, jungiantys lanko galus su skritulio centru. Išpjovą ribojantis lankas vadinamas *ìšpjovos lankù*. 315 paveiksle pavaizduotos dvi išpjovos, kurių lankai ALB ir AMB. Pirmoji išpjova subrūkšniuota.

Sakykime, skritulio spindulys R, skritulio išpjovą riboja lankas, kurio laipsninis matas α. Išvesime formulę skritulio išpjovos plotui S apskaičiuoti. Kadangi viso skritulio plotas lygus πR^2, tai skritulio išpjovos, kurią riboja $1°$ lankas, plotas lygus $\frac{\pi R^2}{360}$, o plotas S išreiškiamas formule

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha.$$

Klausimai ir uždaviniai

1101. Persibraižykite lentelę. Taikydami apskritimo, kurio spindulys R, ilgio C formulę užpildykite lentelės tuščius langelius. Laikykite, kad $\pi = 3{,}14$.

C			82	18π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	3			0,7		101,5	$2\frac{1}{3}$	

1102. Kaip pasikeis apskritimo ilgis, kai apskritimo spindulį: a) padidinsime tris kartus; b) sumažinsime du kartus; c) padidinsime k kartų; d) sumažinsime k kartų?

1103. Kaip pasikeis apskritimo spindulys, kai apskritimo ilgį: a) padidinsime k kartų; b) sumažinsime k kartų?

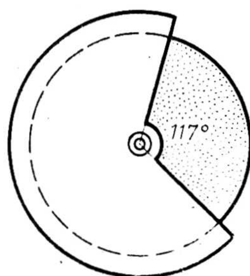
1104. Raskite apskritimo ilgį, kai apskritimas apibrėžtas apie: a) taisyklingąjį trikampį, kurio kraštinė a; b) statųjį trikampį, kurio statiniai a ir b; c) lygiašonį trikampį, kurio pagrindas a, šoninė kraštinė b; d) stačiakampį, kurio kraštinė a, smailusis kampas tarp įstrižainių α; e) taisyklingąjį šešiakampį, kurio plotas lygus $24\sqrt{3}$ cm².

1105. Raskite apskritimo ilgį, kai apskritimas įbrėžtas į: a) kvadratą, kurio kraštinė a; b) statųjį lygiašonį trikampį, kurio įžambinė c; c) statųjį trikampį, kurio įžambinė c, smailusis kampas α; d) lygiašonį trikampį, kurio kampas prie pagrindo α, į pagrindą nuleista aukštinė h.

1106. Šilumvežis nuvažiavo 1413 m, jo ratas apsisuko 300 kartų. Raskite šilumvežio rato skersmenį.

1107. Metras yra apytiksliai $\frac{1}{40\,000\,000}$ Žemės pusiaujo dalis. Laikydami, kad Žemė yra rutulio formos, apskaičiuokite Žemės skersmenį kilometrais.

1108. Dirbtinio Žemės palydovo orbita — apskritimas, kuris nutolęs nuo Žemės 320 km atstumu. Žemės spindulys lygus 6370 km. Apskaičiuokite palydovo orbitos ilgį.



316 pav.

1109. Apskritimo spindulys lygus 6 cm. Apskaičiuokite apskritimo lanko ilgį, kai jo laipsninis matas lygus: a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 90°.

1110. Apskritimo lanku nuotolis tarp krumpliaračio krumplių vidurių lygus 47,1 mm. Krumpliaračio skersmuo lygus 450 mm. Kiek krumplių turi krumpliaratis?

1111. Šlifavimo diskas apgaubtas gaubtu (316 pav.). Disko skersmuo lygus 58 cm, neuždengtos dalies lankas lygus 117° Raskite neuždengto lanko ilgį.

1112. Sieninio laikrodžio švytuoklės švytavimo kampas lygus 38°, lanko, kurį nubrėžia švytuoklės galas, ilgis lygus 24 cm. Raskite švytuoklės ilgį.

1113. Geležinkelio posūkio spindulys lygus 5 km, o posūkio lanko ilgis — 400 m. Koks posūkio lanko laipsninis matas?

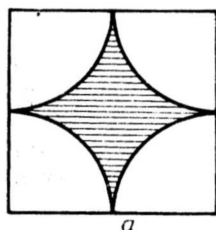
1114. Persibraižykite lentelę. Taikydami skritulio, kurio spindulys R, ploto S formulę užpildykite tuščius langelius. Laikykite, kad $\pi=3,14$.

S			9		49π			6,25
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3	$\sqrt{3}$	

1115. Kaip pasikeis skritulio plotas, kai jo spindulį: a) padidinsime k kartų; b) sumažinsime k kartų?

1116. Raskite skritulio plotą, kai skritulys apibrėžtas apie: a) stačiakampį, kurio kraštinės a ir b; b) statųjį trikampį, kurio statinis a ir prieš jį esantis kampas α; c) lygiašonį trikampį, kurio pagrindas a ir į pagrindą nuleista aukštinė h.

1117. Raskite skritulio plotą, kai skritulys įbrėžtas į: a) lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė a; b) statųjį trikampį, kurio statinis a ir prieš jį esantis smailusis kampas α; c) lygiašonį trikampį, kurio šoninė kraštinė a ir kampas, esantis



317 pav.

prieš pagrindą, α; d) lygiašonę trapeciją, kurios didesnysis pagrindas a ir smailusis kampas α.

1118. Maskvos Kremliaus Varpų varpo pagrindo skersmuo lygus 6,6 m. Apskaičiuokite varpo pagrindo plotą.

1119. Cirko arenos apskritimo ilgis lygus 41 m. Raskite arenos skersmenį ir plotą.

1120. Žiedą riboja du apskritimai, kurių centras bendras, o spinduliai R_1 ir R_2, $R_1 < R_2$. Raskite žiedo plotą. Apskaičiuokite žiedo plotą, kai $R_1 = 1{,}5$ cm, $R_2 = 2{,}5$ cm.

1121. Apvalaus varinio laido skerspjūvio pjūvio plotas lygus 314 mm^2. Kiek laidas storesnis už 18,5 mm skersmens angą?

1122. Apie apskritą klombą, kurios skersmuo lygus 3 m, smėliu pabarstytas 1 m pločio takas. Kiek smėlio išberta ant to tako, jei 1 m^2 pabarstyti reikia 0,8 dm^3 smėlio?

1123. Skritulį, kurio spindulys r, riboja apskritimas, į kurį įbrėžtas kvadratas. Raskite skritulio dalies, kuri liko išpjovus kvadratą, plotą.

1124. Nubrėžti keturi apskritimai. Jų centras bendras, o spinduliai lygūs 1, 2, 3 ir 4. Raskite mažiausio skritulio plotą ir kiekvieno iš trijų žiedų plotą.

1125. Trijų pusskritulių skersmenys yra stačiojo trikampio kraštinės. Įrodykite, kad pusskritulio, kurio skersmuo yra įžambinė, plotas lygus pusskritulių, kurių skersmenys yra statiniai, plotų sumai.

1126. Iš skritulio, kurio spindulys 10 cm, iškirpta išpjova, kurios lankas lygus 60°. Apskaičiuokite skritulio likusios dalies plotą.

1127. Išpjovos, kurios centrinis kampas lygus 72°, plotas lygus S. Raskite išpjovos spindulį.

1128. Kvadrato kraštinė lygi a (317 pav.). Apskaičiuokite subrūkšniuotos figūros plotą.

XII SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Koks daugiakampis vadinamas taisyklinguoju? Pateikite taisyklingųjų daugiakampių pavyzdžių.
2. Išveskite formulę taisyklingojo n-kampio kampui apskaičiuoti.
3. Suformuluokite ir įrodykite apie taisyklingąjį daugiakampį apibrėžto apskritimo teoremą.
4. Suformuluokite ir įrodykite į taisyklingąjį daugiakampį įbrėžto apskritimo teoremą.
5. Išveskite formulę taisyklingojo daugiakampio plotui apskai-

čiuoti, kai žinomas jo perimetras ir įbrėžtinio apskritimo spindulys.

6. Išveskite formules taisyklingojo n-kampio kraštinei ir į jį įbrėžto apskritimo spinduliui apskaičiuoti, kai žinomas apibrėžtinio apskritimo spindulys.
7. Kaip taisyklingojo trikampio, kvadrato ir taisyklingojo šešiakampio kraštinės išreiškiamos apibrėžtinio apskritimo spinduliu?
8. Išveskite apskritimo ilgio formulę.
9. Paaiškinkite, kuris skaičius žymimas raide π ir kokia jo apytikslė reikšmė.
10. Išveskite apskritimo lanko ilgio formulę.
11. Išveskite skritulio ploto formulę.
12. Išveskite skritulio išpjovos ploto formulę.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

1129. Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio vienas priekampis lygus: a) 18°; b) 40°; c) 72°; d) 60°?

1130. Į apskritimą, kurio spindulys lygus 3 dm, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Kvadrato kraštinė lygi trikampio kraštinei. Raskite apie kvadratą apibrėžto apskritimo spindulį.

1131. Raskite taisyklingojo šešiakampio $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ perimetrą, kai $A_1A_4=2{,}24$ cm.

1132. Raskite taisyklingojo trikampio ir kvadrato perimetrų santykį, kai: a) jie įbrėžti į tą patį apskritimą; b) jie apibrėžti apie tą patį apskritimą.

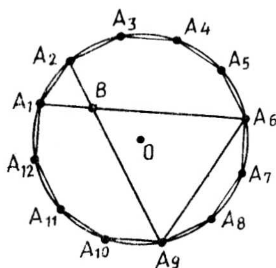
1133. Taisyklingojo dvylikakampio įstrižainės A_1A_6 ir A_2A_9 susikerta taške B (318 pav.). Įrodykite, kad: a) trikampiai A_1A_2B ir A_6A_9B lygiakraščiai; b) $A_1A_6=2r$; čia r — į dvylikakampį įbrėžto apskritimo spindulys.

1134. Taisyklingojo dešimtkampio $A_1A_2...A_{10}$, įbrėžto į apskritimą, kurio spindulys R, įstrižainės A_1A_4 ir A_2A_7 susikerta taške B (319 pav.). Įrodykite, kad: a) $A_2A_7=2R$; b) A_1A_2B ir BA_4O — panašūs lygiašoniai trikampiai; c) $A_1A_4-A_1A_2=$ $=R$.

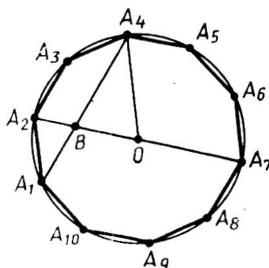
1135. Į skritulį, kurio plotas lygus 36π cm^2, įbrėžtas taisyklingasis šešiakampis. Raskite to šešiakampio kraštinę ir plotą.

1136. Kvadratas $A_1A_2A_3A_4$ įbrėžtas į apskritimą, kurio spindulys R (320 pav.). Jo kraštinėse pažymėti aštuoni taškai; $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=A_4B_4=A_1C_1=A_2C_2=A_3C_3=A_4C_4$. Įrodykite, kad $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ — taisyklingasis aštuonkampis; jo plotą išreikškite spinduliu R.

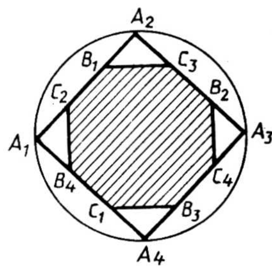
1137. Du kartus apsisukęs aplink Žemę apskritimine orbita kosminis laivas nuskriejo 84 152 km. Žemės spindulys lygus



318 pav.



319 pav.



320 pav.

6370 km. Koks atstumas tarp Žemės paviršiaus ir kosminio laivo?

1138. Į rombą įbrėžtas apskritimas. Raskite apskritimo ilgį, kai: a) rombo įstrižainės lygios 6 cm ir 8 cm; b) rombo kraštinė lygi a, smailusis kampas lygus α.

1139. Apeinant skritulio formos miško sklypą pamiške 4 km/h greičiu sugaištama 45 min daugiau, negu einant skersai. Raskite kelio ilgį einant pamiške.

1140. Į taisyklingąjį daugiakampį įbrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad skritulio, kurį riboja tas apskritimas, ir daugiakampio plotų santykis lygus apskritimo ilgio ir daugiakampio perimetro santykiui.

1141*. Nubraižykite taisyklingąjį aštuonkampį, kurio kraštinė lygi duotai atkarpai.

1142*. Duoti du skrituliai. Nubrėžkite skritulį, kurio plotas lygus duotų skritulių plotų sumai.

1143. Apie duotą apskritimą apibrėžkite: a) taisyklingąjį trikampį; b) taisyklingąjį šešiakampį.

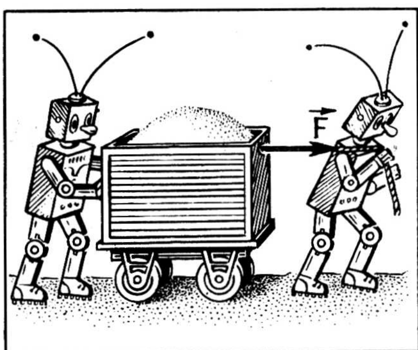
1144. Apie duotą apskritimą apibrėžkite: a) taisyklingąjį keturkampį, b) taisyklingąjį aštuonkampį.

Su programuojamaisiais skaičiuotuvais MK-54 — MK-57 spręstini uždaviniai

1145. Į apskritimą, kurio spindulys lygus 1, įbrėžtas taisyklingasis n-kampis. Apskaičiuokite jo pusperimetrį, kai n lygus 3, 4, 6, 10, 20, 30, 40, 60, 80, 120, 180, 240. Prie kokio skaičiaus artėja pusperimetris, kai $n \to \infty$?

1146. Į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingasis n-kampis. Sudarykite programą jo perimetrui apskaičiuoti.

1147. Į apskritimą, kurio spindulys lygus 1, įbrėžtas taisyklingasis n-kampis. Apskaičiuokite jo plotą, kai n lygus 3, 4, 6, 10, 24, 45, 90, 180, 360, 500, 700. Prie kokio skaičiaus artėja plotas, kai $n \to \infty$?



XIII skyrius

JUDESIAI

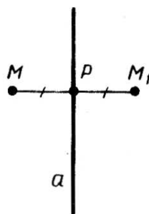
§ 1. JUDESIO SĄVOKA

113. Plokštumos atvaizdis į ją pačią. Įsivaizduokime, kad kiekvieną plokštumos tašką atitinka kuris nors tos plokštumos taškas ir kiekvienas taškas atitinka kurį nors tašką. Tada sakoma, kad turime *plokštumos atvaizdį į ją pačią.*

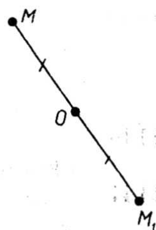
Plokštumos atvaizdžio į ją pačią pavyzdys — simetriški ašies atžvilgiu taškai (žr. 47 skyrelį). Sakykime, a — simetrijos ašis (321 pav.). Pasirinkime bet kurį tašką M, nesantį tiesėje a, raskime jam simetrišką tiesės a atžvilgiu tašką M_1. Tam reikia nuleisti statmenį MP į tiesę a ir tiesėje PM atidėti atkarpą PM_1, lygią atkarpai MP, kaip parodyta 321 paveiksle. Taškas M_1 — ieškomasis. Jei taškas M yra tiesėje a, tai jam simetriškas taškas M_1 sutampa su tašku M. Taigi, remdamiesi simetriškų ašies atžvilgiu taškų sąvoka, kiekvienam plokštumos taškui M priskiriame tos plokštumos tašką M_1. Be to, kiekvienas taškas M_1 atitinka tam tikrą tašką M. Tai aišku iš 321 paveikslo. Gautąjį plokštumos atvaizdį į ją pačią vadiname *plokštumõs ašinė simètrija.*

Dabar prisiminkime simetriškus taško atžvilgiu taškus (žr. 47 skyrelį). Sakykime, O — simetrijos centras. Kiekvienam plokštumos taškui M priskirkime tašką M_1, simetrišką taškui M taško O atžvilgiu (322 pav.). Pabandykite savarankiškai įsitikinti, kad taip irgi gaunamas plokštumos atvaizdis į ją pačią. Jis vadinamas *plokštumõs centrinė simètrija.*

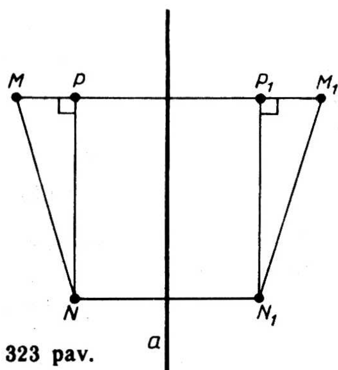
114. Judesio sąvoka. Ašinei simetrijai būdinga šitokia svarbi savybė: *ašinė simetrija yra nekeičiantis atstumo tarp taškų plokštumos atvaizdis į ją pačią.* Paaiškinsime, ką tai reiškia. Sakykime, M ir N — kurie nors taškai, o M_1 ir N_1 — jiems simetriški tiesės a atžvilgiu taškai (323 pav.). Iš taškų N ir N_1 nuleiski-



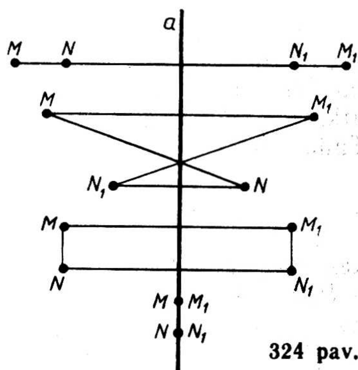
321 pav.



322 pav.



323 pav.



324 pav.

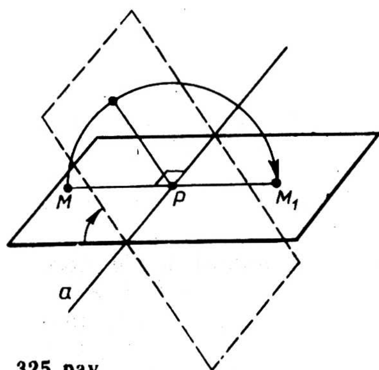
me statmenis NP ir N_1P_1 į tiesę MM_1. Statieji trikampiai MNP ir $M_1N_1P_1$ lygūs pagal du statinius: $MP=M_1P_1$ ir $NP=N_1P_1$ (paaiškinkite, kodėl tie statiniai lygūs). Vadinasi, jų įžambinės MN ir M_1N_1 irgi lygios. Taigi *atstumas tarp taškų M ir N lygus atstumui tarp jiems simetriškų taškų M_1 ir N_1*. (Kitus atvejus, kurie pavaizduoti 324 paveiksle, išnagrinėkite savarankiškai; įsitikinkite, kad ir tais atvejais $MN=M_1N_1$.) Taigi ašinė simetrija yra atvaizdis, kuris nekeičia atstumo tarp taškų. Kiekvienas atvaizdis, kuriam būdinga šitokia savybė, vadinamas *judesiu* (arba *poslinkiu*). Taigi *plokštumos judesys — atstumo nekeičiantis plokštumos atvaizdis į ją pačią.*

Kodėl atstumo nekeičiantis atvaizdis vadinamas judesiu (arba poslinkiu), galima paaiškinti ašinės simetrijos pavyzdžiu. Ją galima įsivaizduoti kaip plokštumos posūkio erdvėje 180° kampu apie ašį a rezultatą. 325 paveiksle parodyta, kaip toks posūkis, atliekamas.

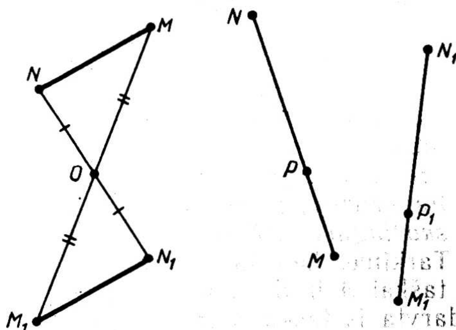
Pabrėžiame, kad *plokštumos centrinė simetrija yra judesys* (įsitikinkite savarankiškai, naudodamiesi 326 paveikslu).

Įrodysime šitokią teoremą.

T e o r e m a. ***Judesys atkarpą atvaizduoja į atkarpą.***



325 pav.



326 pav.

327 pav.

Įrodymas. Sakykime, judesys atkarpos MN galus M ir N atvaizduoja į taškus M_1 ir N_1 (327 pav.). Įrodysime, kad atkarpa MN atvaizduojama į atkarpą M_1N_1. Sakykime, P — bet kuris atkarpos MN taškas, P_1 — taškas, į kurį atvaizduojamas taškas P. Tada $MP+PN=MN$. Kadangi judesys nekeičia atstumo, tai

$$M_1N_1=MN,\quad M_1P_1=MP \text{ ir } N_1P_1=NP. \qquad (1)$$

Iš (1) lygybių gauname, kad $M_1P_1+P_1N_1=M_1N_1$, todėl taškas P_1 yra atkarpoje M_1N_1 (jeigu taip nebūtų, tai būtų M_1P_1+ $+P_1N_1>M_1N_1$). Taigi atkarpos MN taškai atvaizduojami į atkarpos M_1N_1 taškus.

Dar reikia įrodyti, kad atkarpos M_1N_1 kiekvienas taškas P_1 atitinka atkarpos MN kurį nors tašką P. Įrodysime. Sakykime, P_1 — atkarpos M_1N_1 bet kuris taškas, P — taškas, kurį judesys atvaizduoja į tašką P_1. Reikia įrodyti, kad taškas P — atkarpos MN taškas. Iš (1) lygybių ir lygybės $M_1N_1=M_1P_1+P_1N_1$ išplaukia, kad $MP+PN=MN$, taigi taškas P yra atkarpoje MN. Teorema įrodyta.

Išvada. *Judesys trikampį atvaizduoja į jam lygų trikampį.*

Įsitikinsime. Remiantis įrodyta teorema, judesys kiekvieną trikampio kraštinę atvaizduoja į jai lygią atkarpą, todėl trikampį atvaizduoja į trikampį, kurio kraštinės lygios atitinkamoms nagrinėjamo trikampio kraštinėms, t. y. į jam lygų trikampį.

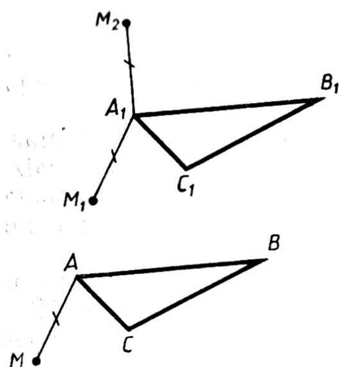
Remiantis įrodyta teorema nesunku įsitikinti, kad judesys tiesę atvaizduoja į tiesę, spindulį — į spindulį, kampą — į jam lygų kampą.

115*. Uždėjimai ir judesiai. Priminsime, kad šiame geometrijos kurse figūrų lygumas apibrėžiamas vartojant uždėjimo sąvoką. Sakoma, kad figūra F lygi figūrai F_1, jei uždedant figūrą F galima sutapdinti su figūra F_1. Šiame kurse uždėjimo sąvoka laikoma geometrijos pirmine sąvoka, todėl ji neapibrėžiama. Figūros F uždėjimas ant figūros F_1 nusako tam tikrą figūros F atvaizdį į figūrą F_1. Dar daugiau, laikoma, kad ne tik figūros F taškai, bet ir kiekvienas plokštumos taškas atvaizduojamas į tam tikrą plokštumos tašką, t. y. laikoma, kad *uždėjimas nusako plokštumos atvaizdį į ją pačią.*

Tačiau ne kiekvienas plokštumos atvaizdis į ją pačią atitinka uždėjimą. Uždėjimai turi aksiomose išreikštas savybes (žr. 1 priedo 7—13 aksiomas). Remiantis tomis aksiomomis galima įrodyti tas uždėjimų savybes, kurias praktiškai įsivaizduojame ir kuriomis remiamės įrodydami teoremas bei spręsdami uždavinius.

Pavyzdžiui, įrodysime, kad *uždedant skirtingi taškai sutampa su skirtingais taškais.*

Tarkime, kad taip nėra, t. y. kaip nors uždedant kurie nors du taškai A ir B sutampa su tuo pačiu tašku C. Tada figūra F_1, sudaryta iš taškų A ir B, lygi figūrai F_2, sudarytai iš vieno taško C. Iš čia, remiantis 12 aksioma, išplaukia, kad $F_2=F_1$, t. y. uždedant figūrą F_2 galima sutapdinti su figūra F_1. Tačiau taip



328 pav.

negali būti, nes uždedant taškas C sutampa tik su vienu plokštumos tašku.

Iš įrodytojo teiginio išplaukia, kad uždedant atkarpa sutampa su atkarpa. Įsitikinsime. Atkarpos AB galai A ir B sutampa su skirtingais taškais A_1 ir B_1, todėl atkarpa AB sutampa su atkarpa A_1B_1 (7 aksioma). Remiantis lygių figūrų apibrėžimu, atkarpa AB lygi atkarpai A_1B_1. Kadangi lygių atkarpų ilgiai lygūs, tai uždėjimas nusako nekeičiantį atstumo plokštumos atvaizdį į ją pačią, t. y. *kiekvienas uždėjimas nusako plokštumos judesį.* Įrodysime, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys.

T e o r e m a. ***Kiekvienas judesys atitinka uždėjimą.***

Į r o d y m a s. Išnagrinėkime bet kurį judesį (jį pažymėkime raide g). Įrodysime, kad jis atitinka uždėjimą. Pasirinkime kokį nors trikampį ABC. Judesys g tą trikampį atvaizduoja į jam lygų trikampį $A_1B_1C_1$. Remiantis lygių trikampių apibrėžimu, uždedant taškus A, B ir C galima sutapdinti su taškais A_1, B_1 ir C_1. Tą uždėjimą pažymėkime raide f.

Įrodysime, kad judesys g sutampa su atvaizdžiu, kurį nusako uždėjimas f. Tarkime, kad taip nėra. Tada yra plokštumos taškas M, kurį judesys atvaizduoja į tašką M_1, o minėtas atvaizdis — į kitą tašką: M_2. Kadangi abu atvaizdžiai nekeičia atstumo, tai $AM=A_1M_1$, $AM=A_1M_2$, todėl $A_1M_1=A_1M_2$, t. y. taškas A_1 vienodai nutolęs nuo taškų M_1 ir M_2 (328 pav.). Šitaip įrodoma, kad taškai B_1 ir C_1 vienodai nutolę nuo taškų M_1 ir M_2. Iš to išplaukia, kad taškai A_1, B_1 ir C_1 yra atkarpos M_1M_2 vidurio statmenyje. Tačiau taip negali būti, nes trikampio $A_1B_1C_1$ viršūnės nėra vienoje tiesėje. Taigi atvaizdis, kurį nusako uždėjimas f, ir judesys g sutampa, t. y. judesys g atitinka uždėjimą f. Teorema įrodyta.

I š v a d a. *Judesys kiekvieną figūrą atvaizduoja į jai lygią figūrą.*

Uždaviniai

1148. Įrodykite, kad plokštumos ašinė simetrija: a) simetrijos ašiai lygiagrečią tiesę atvaizduoja į simetrijos ašiai lygiagrečią tiesę; b) simetrijos ašiai statmeną tiesę atvaizduoja į ją pačią.

1149. Įrodykite, kad plokštumos centrinė simetrija: a) tiesę, neinančią per simetrijos centrą, atvaizduoja į jai lygiagrečią tiesę; b) tiesę, einančią per simetrijos centrą, atvaizduoja į ją pačią.

1150. Įrodykite, kad judesys kampą atvaizduoja į jam lygų kampą.
S p r e n d i m a s. Sakykime, judesys kampą AOB atvaizduoja į kampą $A_1O_1B_1$, be to, taškus A, O, B atvaizduoja į taškus A_1, O_1, B_1. Kadangi judesys nekeičia atstumo, tai $OA=O_1A_1$, $OB=O_1B_1$, $AB=A_1B_1$.

Jei kampas AOB neištiestinis, tai trikampiai AOB ir $A_1O_1B_1$ lygūs (pagal tris kraštines), todėl $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Jei kampas AOB ištiestinis, tai ir kampas $A_1O_1B_1$ ištiestinis (paaiškinkite, kodėl), todėl jie lygūs.

1151. Įrodykite, kad judesys lygiagrečias tieses atvaizduoja į lygiagrečias tieses.

1152. Įrodykite, kad judesys: a) lygiagretainį atvaizduoja į lygiagretainį; b) trapeciją atvaizduoja į trapeciją; c) rombą atvaizduoja į rombą; c) stačiakampį atvaizduoja į stačiakampį, o kvadratą — į kvadratą.

1153. Įrodykite, kad judesys apskritimą atvaizduoja į apskritimą ir abiejų apskritimų spinduliai lygūs.

1154. Įrodykite, kad plokštumos atvaizdis, kuris kiekvieną tašką atvaizduoja į jį patį, yra judesys.

1155. Duoti bet kokie trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$. Įrodykite, kad yra ne daugiau kaip vienas judesys, kuris taškus A, B ir C atvaizduoja į taškus A_1, B_1 ir C_1.

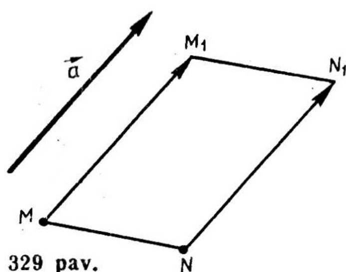
1156. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ kraštinės lygios: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. Įrodykite, kad yra judesys, kuris taškus A, B ir C atvaizduoja į taškus A_1, B_1 ir C_1, tačiau toks judesys tik vienas.
S p r e n d i m a s. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs (pagal tris kraštines). Vadinasi, uždedant taškus A, B ir C galima sutapdinti su taškais A_1, B_1 ir C_1. Taigi yra judesys, kuris taškus A, B ir C atvaizduoja į taškus A_1, B_1 ir C_1. Tas judesys yra vienintelis judesys, kuris taškus A, B ir C atvaizduoja į taškus A_1, B_1 ir C_1 (1155 uždavinys).

1157. Įrodykite, kad du lygiagretainiai lygūs, kai vieno lygiagretainio gretimos kraštinės ir kampas tarp jų lygūs kito lygiagretainio gretimoms kraštinėms ir kampui tarp jų.

1158. Duotos dvi tiesės: a ir b. Ašinės simetrijos ašis yra tiesė a. Nubrėžkite tiesę, į kurią tiesę b atvaizduoja ši ašinė simetrija.

1159. Duota tiesė a ir keturkampis $ABCD$. Nubraižykite figūrą F, į kurią minėtą keturkampį atvaizduoja ašinė simetrija, kurios ašis a. Kokia yra figūra F?

1160. Duotas taškas O ir tiesė b. Nubrėžkite tiesę, į kurią tiesę b atvaizduoja centrinė simetrija, kurios centras O.



329 pav.

1161. Duotas taškas O ir trikampis ABC. Nubraižykite figūrą F, į kurią trikampį ABC atvaizduoja centrinė simetrija, kurios centras O. Kokia yra figūra F?

§ 2. LYGIAGRETUSIS POSTŪMIS IR POSŪKIS

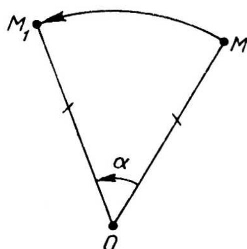
116. Lygiagretusis postūmis. Sakykime, $\vec{a}$ — duotas vektorius. *Lygiagrečiúoju póstūmiu* per vektorių $\vec{a}$ vadinamas plokštumos atvaizdis į ją pačią, kuris kiekvieną tašką M atvaizduoja į tašką M_1, o vektorius $\overrightarrow{MM_1}$ lygus vektoriui $\vec{a}$ (329 pav.).

Lygiagretusis postūmis yra judesys, t. y. nekeičiantis atstumo plokštumos atvaizdis į ją pačią. Įrodysime. Sakykime, lygiagretusis postūmis per vektorių $\vec{a}$ taškus M ir N atvaizduoja į taškus M_1 ir N_1 (žr. 329 pav.). Kadangi $\overrightarrow{MM_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{NN_1}=\vec{a}$, tai $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{NN_1}$. Iš čia išplaukia, kad $MM_1 \| NN_1$ ir $MM_1=NN_1$, todėl keturkampis MM_1N_1N — lygiagretainis. Vadinasi, $MN=M_1N_1$, t. y. atstumas tarp taškų M ir N lygus atstumui tarp taškų M_1 ir N_1 (atvejį, kai taškai M ir N yra vektoriui $\vec{a}$ lygiagrečioje tiesėje, išnagrinėkite savarankiškai). Taigi lygiagretusis postūmis nekeičia atstumo tarp taškų, todėl yra judesys. Tą judesį galima įsivaizduoti kaip plokštumos postūmį vektoriaus $\vec{a}$ kryptimi per jo ilgį.

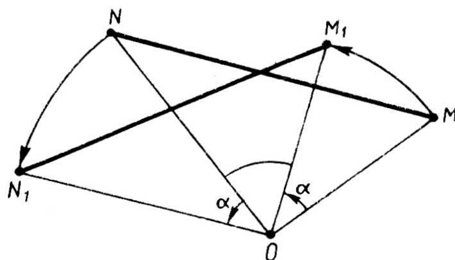
117. Posūkis. Plokštumoje pažymėkime tašką O (posūkio centrą) ir pasirinkime kampą α (posūkio kampą). *Plokštumõs pósūkiu* apie tašką O kampu α vadinamas plokštumos atvaizdis į ją pačią, kuris kiekvieną tašką atvaizduoja į tašką M_1, o $OM=OM_1$ ir kampas MOM_1 lygus α (330 pav.). Taškas O nejuda, t. y. atvaizduojamas į jį patį, o kiti taškai pasisuka apie tašką O ta pačia kryptimi — pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį arba prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį. 330 paveiksle pavaizduotas posūkis prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį.

Posūkis yra judesys, t. y. nekeičiantis atstumo plokštumos atvaizdis į ją pačią.

Įrodysime. Sakykime, O — posūkio centras, α — posūkio prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį kampas (taip pat nagrinėjamas ir posūkio pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį atvejis). Tarkime, kad posūkis taškus M ir N atvaizduoja į taškus M_1 ir N_1



330 pav.



331 pav.

(331 pav.). Trikampiai OMN ir OM_1N_1 lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų: $OM=OM_1$, $ON=ON_1$ ir $\angle MON=\angle M_1ON_1$ (331 paveiksle pavaizduotu atveju kiekvienas tų kampų lygus kampo α ir kampo M_1ON sumai). Iš tų trikampių lygumo išplaukia, kad $MN=M_1N_1$, t. y. atstumas tarp taškų M ir N lygus atstumui tarp taškų M_1 ir N_1 (atvejį, kai taškai O, M ir N yra vienoje tiesėje, išnagrinėkite savarankiškai). Taigi posūkis nekeičia atstumo tarp taškų, todėl yra judesys. Tą posūkį galima įsivaizduoti kaip plokštumos posūkį apie tašką O kampu α.

Uždaviniai

1162. Nubrėžkite atkarpą AB ir vektorių $\overrightarrow{MM_1}$. Nubrėžkite atkarpą A_1B_1, į kurią lygiagretusis postūmis per vektorių $\overrightarrow{MM_1}$ atvaizduoja atkarpą AB.

1163. Nubraižykite trikampį ABC, vektorių $\overrightarrow{MM_1}$, nelygiagretų nė vienai trikampio kraštinei, ir vektorių $\vec{a}$, lygiagretų kraštinei AC. Nubraižykite trikampį $A_1B_1C_1$, į kurį trikampį ABC atvaizduoja lygiagretusis postūmis: a) per vektorių $\overrightarrow{MM_1}$; b) per vektorių $\vec{a}$.

1164. Duotas lygiašonis trikampis ABC, kurio pagrindas AC, ir tiesės AC taškas D; taškas C — atkarpos AD taškas. a) Nubrėžkite atkarpą B_1D, į kurią lygiagretusis postūmis per vektorių $\overrightarrow{CD}$ atvaizduoja atkarpą BC. b) Įrodykite, kad keturkampis ABB_1D — lygiašonė trapecija.

1165. Duotas trikampis, trapecija, apskritimas ir vektorius $\vec{a}$. Nubraižykite figūras, į kurias turimas figūras atvaizduoja lygiagretusis postūmis per vektorių $\vec{a}$.

1166. Nubrėžkite atkarpą A_1B_1, į kurią atkarpą AB atvaizduoja posūkis apie duotą centrą O: a) 120° pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį; b) 75° prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį; c) 180°.

1167. Nubraižykite trikampį, į kurį duotą trikampį ABC atvaizduoja posūkis apie tašką A 160° kampu prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį.

1168. Taškas D yra lygiakraščio trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas. Įrodykite, kad posūkis apie tašką D 120° kampu trikampį ABC atvaizduoja į jį patį.

1169. Įrodykite, kad posūkis apie kvadrato įstrižainių susikirtimo tašką 90° kampu tą kvadratą atvaizduoja į jį patį.

1170. Duotas apskritimas, kurio centras C. Nubrėžkite apskritimą, į kurį duotą apskritimą atvaizduoja posūkis apie tašką O 60° kampu prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį, kai: a) taškai O ir C nesutampa; b) taškai O ir C sutampa.

1171. Nubrėžkite tiesę a_1, į kurią duotą tiesę a atvaizduoja posūkis apie tašką O pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį 60° kampu, kai tiesė a: a) neina per tašką O; b) eina per tašką O.

Sprendimas. a) Nubrėžkime apskritimą, kurio centras O ir kuris liečia tiesę a (paaiškinkite, kaip tai galima padaryti). Sakykime, M — lietimosi taškas. Posūkis apie tašką O tą apskritimą atvaizduoja į jį patį, o liestinę a atvaizduoja į tam tikrą liestinę a_1 (paaiškinkite, kodėl). Norėdami nubrėžti tiesę a_1, randame tašką M_1, į kurį posūkis apie tašką O pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį 60° kampu atvaizduoja tašką M, po to brėžiame apskritimo liestinę a_1 taške M_1.

XIII SKYRIAUS KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Paaiškinkite, kas yra plokštumos atvaizdis į ją pačią.
2. Koks plokštumos atvaizdis vadinamas: a) ašine simetrija; b) centrine simetrija?
3. Įrodykite, kad ašinė simetrija yra plokštumos atvaizdis į ją pačią.
4. Kas yra plokštumos judesys (arba poslinkis)?
5. Įrodykite, kad ašinė simetrija yra judesys.
6. Ar centrinė simetrija yra judesys?
7. Įrodykite, kad judesys atkarpą atvaizduoja į atkarpą.
8. Įrodykite, kad judesys trikampį atvaizduoja į jam lygų trikampį.
9. Paaiškinkite, kas yra uždėjimas.
10. Įrodykite, kad uždedant skirtingi taškai sutapdinami su skirtingais taškais.
11. Įrodykite, kad uždėjimas nusako plokštumos judesį.

12. Įrodykite, kad kiekvieną judesį atitinka uždėjimas.
13. Ar teisingas šitoks teiginys: judesys kiekvieną figūrą atvaizduoja į jai lygią figūrą.
14. Koks plokštumos atvaizdis vadinamas lygiagrečiuoju postūmiu per duotą vektorių?
15. Įrodykite, kad lygiagretusis postūmis yra judesys.
16. Koks plokštumos atvaizdis vadinamas posūkiu?
17. Įrodykite, kad posūkis yra judesys.

PAPILDOMI UŽDAVINIAI

1172. Judesys kiekvieną iš dviejų taškų A ir B atvaizduoja į jį patį. Įrodykite, kad tas judesys kiekvieną tiesės AB tašką atvaizduoja į jį patį.

1173. Judesys kiekvieną trikampio ABC viršūnę atvaizduoja į ją pačią. Įrodykite, kad tas judesys kiekvieną plokštumos tašką atvaizduoja į jį patį.

1174. Įrodykite, kad du stačiakampiai lygūs, kai: a) vieno stačiakampio gretimos kraštinės lygios kito stačiakampio gretimoms kraštinėms; b) vieno stačiakampio kraštinė ir įstrižainė lygi kito stačiakampio kraštinei ir įstrižainei.

1175. Duota tiesė a bei taškai M ir N vienoje tos tiesės pusėje. Įrodykite, kad yra vienintelis tiesės a taškas X, kurio atstumų nuo taškų M ir N suma $MX+XN$ mažiausia.

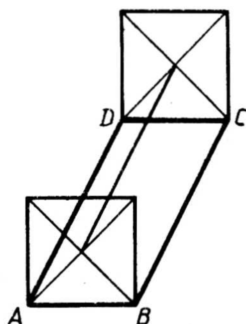
1176. Duotas smailusis kampas ABC ir jo vidaus taškas D. Taikydami ašinę simetriją, raskite duoto kampo kraštinių taškus E ir F, kad trikampio DEF perimetras būtų mažiausias.

1177. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta taške M; A_2, B_2 ir C_2 yra atkarpų AM, BM ir CM vidurio taškai. Įrodykite, kad $\triangle A_1B_1C_1=\triangle A_2B_2C_2$.

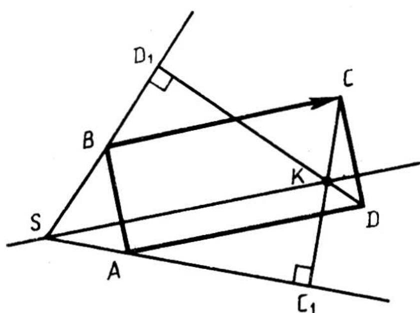
S p r e n d i m a s. Kadangi M — trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas, tai $AM=2MA_1$. Iš čia, prisiminę, kad taškas A_2 — atkarpos AM vidurys, gauname $MA_1=MA_2$, t. y. taškai A_1 ir A_2 simetriški taško M atžvilgiu. Taip pat įrodysime, kad taškai B_1 ir B_2 bei C_1 ir C_2 simetriški taško M atžvilgiu.

Išnagrinėkime centrinę simetriją taško M atžvilgiu. Ta simetrija taškus A_1, B_1, C_1 atvaizduoja į taškus A_2, B_2, C_2, todėl trikampį $A_1B_1C_1$ atvaizduoja į trikampį $A_2B_2C_2$. Vadinasi, $\triangle A_2B_2C_2=\triangle A_1B_1C_1$.

1178. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB ir CD yra kvadratų kraštinės; kvadratai nubraižyti taip, kaip parodyta 332 paveiksle. Taikydami lygiagretųjį postūmį, įrodykite, kad tų kvadratų centrus jungianti atkarpa lygiagreti ir lygi kraštinei AD.



332 pav.



333 pav.

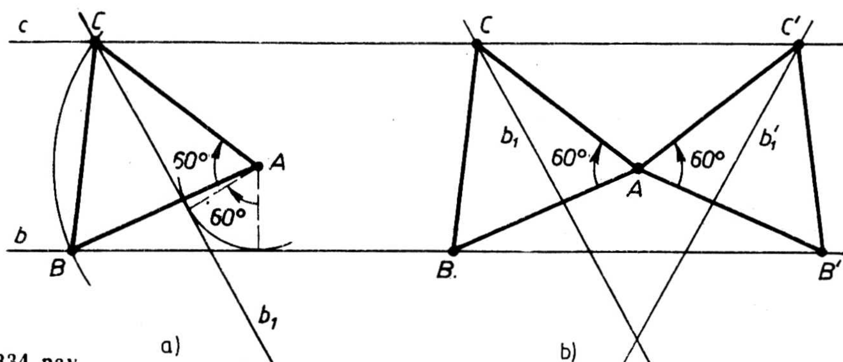
1179*. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė AB yra trikampio ABS kraštinė; $CC_1 \perp AS$, $DD_1 \perp BS$ (333 pav.). Taikydami lygiagretųjį postūmį, įrodykite, kad tiesės SK ir AB viena kitai statmenos.

1180. Į apskritimą, kurio centras O, įbrėžti du lygiakraščiai trikampiai: ABC ir $A_1B_1C_1$. Lanko ABC kryptis iš taško A į tašką C sutampa su lanko $A_1B_1C_1$ kryptimi iš taško A_1 į tašką C_1. Taikydami posūkį apie tašką O, įrodykite, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 arba eina per tašką O, arba susikirsdamos sudaro lygiakraštį trikampį.

1181. Duotos dvi susikertančios tiesės ir taškas O, nesantis nė vienoje jų. Taikydami centrinę simetriją, per tašką O nubrėžkite tiesę, kad jos atkarpos, kurią iškirs duotos tiesės, vidurys būtų taškas O.

1182. Taikydami lygiagretųjį postūmį, nubraižykite trapeciją, kai duoti jos pagrindai ir įstrižainės.

1183. Duotos dvi lygiagrečios tiesės b ir c bei taškas A, nesantis nė vienoje jų. Nubraižykite lygiakraštį trikampį ABC, kurio viršūnės B ir C būtų tiesėse b ir c. Kiek sprendinių turi uždavinys?



334 pav.

Sprendimas. Tarkime, kad uždavinys išspręstas ir ieškomasis trikampis ABC nubraižytas (334 pav., a). Plokštumos posūkis apie tašką A pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį 60° kampu viršūnę B atvaizduoja į viršūnę C, todėl tiesę b atvaizduoja į tiesę b_1, einančią per tašką C. Tiesę b_1 lengva nubrėžti ir neturint taškų B ir C (žr. 1171 uždavinį). Nubrėžę tiesę b_1, randame tiesių b_1 ir c susikirtimo tašką C. Po to, nubrėžę apskritimą, kurio centras A ir spindulys AC, randame tašką B. Trikampis nubraižytas 334 paveiksle, a.

Uždavinys turi du sprendinius. Vieną gauname pasinaudodami plokštumos posūkiu apie tašką A pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį 60° kampu ($\triangle ABC$; 334 pav., b), kitą — plokštumos posūkiu apie tašką A prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį 60° kampu ($\triangle AB'C'$; 334 pav., b).

SUNKESNI UŽDAVINIAI

X skyriaus uždaviniai

1184. Keturkampio $ABCD$ viršūnių koordinatės šitokios: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ ir $D(x_4; y_4)$. Įrodykite, kad tas keturkampis yra lygiagretainis tada ir tik tada, kai $x_1+x_3=x_2+x_4$ ir $y_1+y_3=y_2+y_4$.

1185. Duoti du taškai: $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$. Įrodykite, kad taško C, dalijančio atkarpą AB santykiu λ (t. y. $\frac{AC}{CB}=\lambda$), koordinatės $(x; y)$ išreiškiamos formulėmis

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

1186. Iš fizikos žinoma, kad vienalytės trikampės plokštelės sunkio centras yra pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Raskite tokios plokštelės sunkio centro koordinates, kai žinomos jos viršūnių koordinatės: $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$.

1187. Trikampio ABC viršūnių koordinatės šitokios: $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(3; 0)$. Kampo A pusiaukampinė kraštinę BC kerta taške D. Raskite taško D koordinates.

1188. Trikampio ABC kraštinės $AC=9$ cm, $BC=12$ cm. Pusiaukraštinės AM ir BN viena kitai statmenos. Raskite AB.

1189. Raskite masių m_1, m_2, m_3, sukoncentruotų taškuose $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$, sunkio centro koordinates.

1190. Kiekvienu atveju raskite abscisių ašies tašką M, kad jo atstumų iki taškų A ir B suma būtų mažiausia: a) $A(2; 3)$, $B(4; -5)$; b) $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$.

1191. Įrodykite, kad: a) lygtis $Ax+By+C=0$, kai A ir B kartu

nelygūs nuliui, yra tiesės lygtis; b) lygtis $x^2-xy-2=0$ nėra apskritimo lygtis.

1192. Raskite apskritimų, kurių lygtys $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ir $x^2+y^2=1$, susikirtimo taškų koordinates ir apskaičiuokite jų bendros stygos ilgį.

1193. Duoti trys taškai A, B, C ir trys skaičiai α, β, γ. Raskite visų taškų M, su kuriais sumos $\alpha AM^2+\beta BM^2+\gamma CM^2$ reikšmė pastovi, aibę, kai: a) $\alpha+\beta+\gamma\neq0$; b) $\alpha+\beta+\gamma=0$.

1194. Duota tiesė a ir šalia jos taškas A; kiekvienam tiesės a taškui M_1 priskiriamas spindulio AM_1 taškas M; $AM_1\cdot AM=k$, k — teigiamas skaičius. Raskite visų taškų M aibę.

1195. Taškas O nėra duoto apskritimo taškas. Kiekvienam apskritimo taškui M_1 priskiriamas spindulio OM_1 taškas M; $OM=k\cdot OM_1$, k — teigiamas skaičius. Raskite visų taškų M aibę.

1196. Sakykime, A ir B —duoti taškai, k — duotas teigiamas skaičius, nelygus 1. a) Įrodykite, kad visų taškų M, tenkinančių sąlygą $AM=k\cdot BM$, aibė yra apskritimas (Apolonijo apskritimas). b) Įrodykite, kad tas apskritimas kerta kiekvieną apskritimą, einantį per taškus A ir B, o jų spinduliai, nubrėžti į susikirtimo tašką, vienas kitam statmeni.

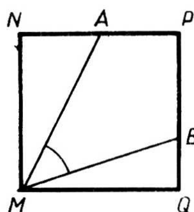
XI skyriaus uždaviniai

1197. Kvadrato $MNPQ$ kraštinėse pažymėti taškai A ir B; $NA=\frac{1}{2}MN$, $QB=\frac{1}{3}MN$ (335 pav.). Įrodykite, kad $\angle AMB=45°$.

1198. Keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikerta taške O. Trikampio ODC plotas yra trikampių OBC ir OAD plotų geometrinis vidurkis. Įrodykite, kad $ABCD$ — trapecija, kurios pagrindai AD ir BC, arba lygiagretainis.

1199. Keturkampio kraštinės (iš eilės) a, b, c, d. Įrodykite, kad jo plotas S tenkina nelygybę $S\leqslant\frac{1}{2}(ac+bd)$.

1200. Įrodykite, kad trikampio ABC pusiaukampinę AA_1 galima apskaičiuoti pagal formulę $AA_1=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$; čia $b=AC$, $c=AB$.



335 pav.

1201. Įbrėžto į apskritimą keturkampio įstrižaines išreikškite jo kraštinėmis.

1202. Įrodykite, kad įbrėžto į apskritimą keturkampio plotą galima apskaičiuoti pagal formulę

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};$$

čia p — keturkampio pusperimetris, a, b, c, d — jo kraštinės.

1203. Įrodykite, kad trikampio kraštinės aritmetinę progresiją sudaro tada ir tik tada, kai tiesė, einanti per įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrus, statmena vienai trikampio pusiaukampinei.

1204. Stačiosios trapecijos $ABCD$ mažesnysis pagrindas AD lygus 3, o nestatmena pagrindams šoninė kraštinė CD lygi 6. Taškas E — atkarpos CD vidurys, kampas CBE lygus α. Raskite trapecijos $ABCD$ plotą.

1205. Smailiojo trikampio ABC kraštinė AB didesnė už kraštinę BC, atkarpos AM ir CN — trikampio aukštinės, taškas O — apibrėžtinio apskritimo centras. Kampas ABC lygus β, o keturkampio $NOMB$ plotas lygus S. Raskite kraštinę AC.

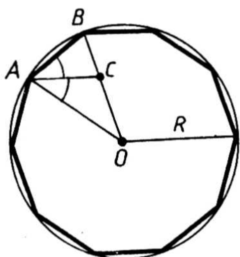
1206. Trikampio ABC aukštinės AH ilgis h, pusiaukraštinės AM ilgis l; AN — trikampio pusiaukampinė, taškas N — atkarpos MH vidurys. Raskite atstumą nuo viršūnės A iki trikampio ABC aukštinių susikirtimo taško.

XII skyriaus uždaviniai

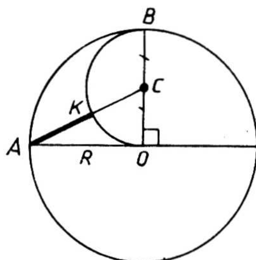
1207. 336 paveiksle pavaizduotas į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingasis dešimtkampis; AC — kampo AOB pusiaukampinė. Įrodykite, kad: a) $\triangle ABC \sim \triangle OAB$; b) $AB = AC = OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$.

1208. Įrodykite, kad 337 paveiksle pavaizduota atkarpa AK lygi į apskritimą, kurio centras O, įbrėžto taisyklingojo dešimtkampio kraštinei.

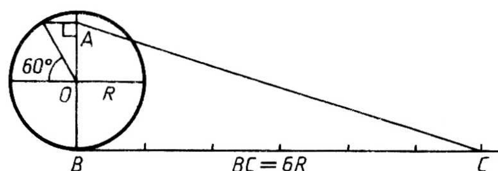
1209. Apie taisyklingąjį penkiakampį $A_1A_2A_3A_4A_5$ apibrėžtas apskritimas; apskritimo centras O. Trikampio ABC viršūnės yra penkiakampio kraštinių A_1A_2, A_2A_3 ir A_3A_4 vidurio taškai. Įrodykite, kad taškas O ir į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras O_1 simetriški tiesės AC atžvilgiu.



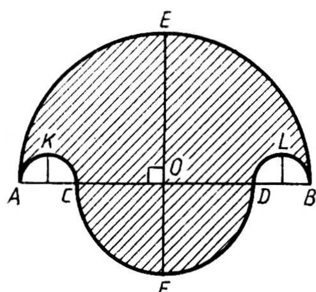
336 pav.



337 pav.



338 pav.



339 pav.

1210*. Į duotą apskritimą įbrėžkite taisyklingąjį dešimtkampį.

1211*. Į duotą apskritimą įbrėžkite taisyklingąjį penkiakampį.

1212. Į duotą apskritimą įbrėžkite penkiakampę žvaigždę.

1213. Sakykime, M — bet kuris taisyklingojo n-kampio vidaus taškas. Įrodykite, kad statmenų, nuleistų iš taško M į tieses, kuriose yra n-kampio kraštinės, suma lygi nr; čia r — įbrėžtinio apskritimo spindulys.

1214. Trikampio kampai sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis 2. Įrodykite, kad to trikampio kraštinių vidurio taškai ir aukštinių pagrindų taškai yra šešios taisyklingojo septynkampio viršūnės.

1215. Sakykime, $ABCD$ — kvadratas, $A_1B_1C_1$ — taisyklingasis trikampis, įbrėžti į apskritimą, kurio spindulys R. Įrodykite, kad sumos $AB+A_1B_1$ reikšmė $0{,}01R$ tikslumu lygi pusapskritimio ilgiui.

1216. Remdamiesi 338 paveikslo duomenimis įrodykite, kad atkarpos AC ilgis $0{,}001R$ tikslumu lygus apskritimo, kurio spindulys R, ilgiui.

1217. 339 paveiksle pavaizduoti keturi pusapskritimiai: AEB, AKC, CFD, DLB; $AC=DB$. Įrodykite, kad subrūkšniuotos figūros plotas lygus skritulio, kurio skersmuo — atkarpa EF, plotui.

1218. Nubrėžkite skritulio kraštą, kai skritulio plotas lygus: a) žiedo tarp dviejų duotų koncentrinių apskritimų plotui; b) duoto pusskritulio plotui; c) duotos skritulio išpjovos, kurią riboja 60° lankas, plotui.

XIII skyriaus uždaviniai

1219. Judesys g tašką A atvaizduoja į tašką B, o tašką B — į tašką A. Įrodykite, kad g — centrinė simetrija arba ašinė simetrija.

1220. Duotos dvi lygios atkarpos: AB ir A_1B_1. Įrodykite, kad yra du ir tik du judesiai, kurie taškus A ir B atvaizduoja į taškus A_1 ir B_1.

1221. Įrodykite, kad du lygiagretainiai lygūs, kai vieno lygiagretainio įstrižainės ir kampas tarp jų lygūs kito lygiagretainio įstrižainėms ir kampui tarp jų.

1222. Įrodykite, kad dvi trapecijos lygios, kai vienos trapecijos pagrindai ir šoninės kraštinės lygūs kitos trapecijos pagrindams ir šoninėms kraštinėms.

1223. Įrodykite, kad du trikampiai lygūs, kai vieno trikampio dvi nelygios kraštinės ir prieš jas esančių kampų skirtumas lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir prieš jas esančių kampų skirtumui.

1224. Vieno lygiagretainio viršūnės yra kito lygiagretainio kraštinėse. Įrodykite, kad tų lygiagretainių įstrižainių susikirtimo taškai sutampa.

1225. Duoti du apskritimai ir tiesė. Nubraižykite taisyklingąjį trikampį, kurio dvi viršūnės būtų duotų apskritimų taškai (viena — vieno, kita — kito), o iš trečios viršūnės nuleista aukštinė būtų duotoje tiesėje.

1226. Kampo AOB, kurio viršūnė neprieinama, kraštinėje pažymėtas taškas M. Nubrėžkite atkarpą, lygią atkarpai OM.

1227. Duoti du susikertantys apskritimai. Nubrėžkite atkarpą, kurios galai būtų tų apskritimų taškai, o vidurys — vienas tų apskritimų susikirtimo taškų.

1228. Nubraižykite trikampį, kai duotos visos trys pusiaukraštinės.

1229. Nubraižykite trapeciją, kurios kraštinės lygios duotoms atkarpoms.

1230. Duoti du taškai A ir B bei dvi susikertančios tiesės c ir d. Nubraižykite lygiagretainį $ABCD$, kurio viršūnės C ir D būtų atitinkamai tiesėse c ir d.

1231. Duota tiesė, apskritimas ir jiems nepriklausantis taškas A. Nubraižykite kvadratą $ABCD$, kurio viršūnė B būtų duotoje tiesėje, o viršūnė D — duotame apskritime.

1 priedas

APIE PLANIMETRIJOS AKSIOMAS

Mokydamiesi geometrijos rėmėmės aksiomomis. Primename, kad aksiomomis vadinami pagrindiniai geometrijos teiginiai, kurie laikomi pradiniais. Kartu su vadinamomis pirminėmis sąvokomis jos sudaro geometrijos pagrindą. Pirmosios pirminės sąvokos, su kuriomis susipažinome, buvo taškas ir tiesė. Pirminės sąvokos neapibrėžiamos. Jų savybes išreiškia aksiomos. Vartodami pirmines sąvokas ir aksiomas, apibrėžiame naujas sąvokas, formuluojame ir įrodome teoremas. Taip nagrinėjame geometrinių figūrų savybes.

Pabrėžiame, kad ne visos planimetrijai sukurti būtinos aksiomos buvo pateiktos šiame kurse. Kad aiškinimas būtų paprastesnis, kai kurių aksiomų neformulavome, nors jomis rėmėmės. Čia pateiksime visas planimetrijos aksiomas.

Pirmosios trys aksiomos apibūdina taškų ir tiesių tarpusavio padėtį.

1. *Kiekvienai tiesei priklauso mažiausiai du taškai* [1].
2. *Yra mažiausiai trys taškai, nesantys vienoje tiesėje.*
3. *Per bet kuriuos du taškus eina tiesė, tačiau tik viena.*

Kalbėdami apie taškus, esančius vienoje tiesėje, vartojome sąvoką „būti tarp". Ją laikome geometrijos pirmine sąvoka. Tos sąvokos savybę išreiškia šitokia aksioma.

4. *Iš tiesės trijų taškų vienas ir tik vienas yra tarp kitų dviejų.*

Pabrėžiame, kad sakydami „taškas B yra tarp taškų A ir C" laikome, kad A, B, C — skirtingi tiesės taškai, kad taškas B yra tarp taškų C ir A. Kartais vietoj tų žodžių sakome, kad taškai A ir B yra vienoje taško C pusėje (taškai B ir C yra vienoje taško A pusėje), arba taškai A ir C yra skirtingose taško B pusėse.

5. *Kiekvienas tiesės taškas O ją dalija į dvi dalis (du spindulius) taip, kad bet kurie du vieno spindulio taškai yra vienoje taško O pusėje, o bet kurie du skirtingų spindulių taškai yra skirtingose taško O pusėse.*

Čia laikoma, kad taškas O nepriklauso nė vienam spinduliui.

Primename, kad atkarpa AB vadinama geometrinė figūra, kurią sudaro taškai A ir B bei visi tiesės AB taškai, esantys tarp taškų A ir B. Trumpai galima pasakyti šitaip: atkarpa yra tiesės

---

[1] Sąvokos „priklausyti" (arba „būti"), „aibė", „skaičius" ir t. t. vartojamos ne tik geometrijoje, bet ir kitose matematikos šakose. Todėl laikome, kad jos žinomos ir neskiriame prie planimetrijos pirminių sąvokų.

dalis, kurią riboja du taškai. Jei atkarpa AB ir tiesė a neturi bendrų taškų, tai sakoma, kad taškai A ir B yra vienoje tiesės a pusėje; jei atkarpa AB kerta tiesę a (kuriame nors taške C, esančiame tarp A ir B), tai sakoma, kad taškai A ir B yra skirtingose tiesės a pusėse.

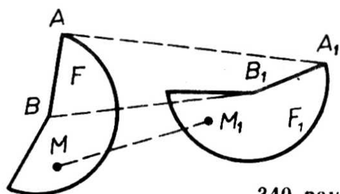
6. *Kiekviena tiesė a plokštumą dalija į dvi dalis (dvi pusplokštumes) taip, kad bet kurie du vienos pusplokštumės taškai yra vienoje tiesės a pusėje, o bet kurie du skirtingų pusplokštumių taškai yra skirtingose tiesės a pusėse.*

Tiesė a vadinama kiekvienos tų pusplokštumių *kraštu;* jos taškai nepriklauso nė vienai minėtų pusplokštumių.

Dabar aptarsime aksiomas, susijusias su figūrų uždėjimo ir lygumo sąvokomis. Uždėjimo sąvoka šiame kurse laikoma pirmine geometrijos sąvoka. I skyriuje, vartodami uždėjimo sąvoką, apibrėžėme geometrinių figūrų lygumą. Tai darėme remdamiesi figūrų uždėjimo vaizdiniais ir tarėme, kad kiekviena geometrinė figūra gali judėti kaip visuma, panašiai kaip juda materialieji kūnai. Tačiau geometrinės figūros nėra materialieji kūnai, todėl geometrinių figūrų uždėjimą reikia suprasti kita, ypatinga prasme.

Norėdami tą prasmę išsiaiškinti, atkreipiame dėmesį į štai ką: sakydami, kad figūrą F uždedame ant jai lygios figūros F_1, įsivaizduojame, kad figūros F kiekvienas taškas uždedamas ant figūros F_1 tam tikro taško. Kitaip sakant, figūros F kiekvieną tašką atitinka figūros F_1 tam tikras taškas. Kad figūros F kiekvieną tašką atitinka figūros F_1 tam tikras taškas, galime teigti ir neuždėdami figūros F ant figūros F_1 (340 pav.). Tokia atitiktis vadinama figūros F atvaizdžiu į figūrą F_1 (čia laikoma, kad figūros F_1 kiekvienas taškas atitinka figūros F tam tikrą tašką). Taigi figūros F uždėjimą ant figūros F_1 atitinka figūros F atvaizdis į figūrą F_1.

Dar daugiau, laikysime, kad ne tik figūros F kiekvienas taškas, bet ir plokštumos kiekvienas taškas atvaizduojamas į plokštumos tam tikrą tašką, t. y. laikysime, kad *uždėjimą atitinka plokštumos atvaizdis į ją pačią.* Tačiau tai ne bet koks plokštumos atvaizdis į ją pačią. Tai bus tik tokie plokštumos atvaizdžiai į ją pačią, kuriems būdingos aksiomomis išreiškiamos savybės (žr. 7—13 aksiomas). Norėdami tas aksiomas suformuluoti, iš naujo apibrėšime figūrų lygumo sąvoką. Sakykime, F ir F_1 — figūros ir plokštumos atvaizdis į ją pačią figūrą F atvaizduoja į figūrą F_1. Sakysime, kad *figūrą F galima sutapdinti su figūra F_1 uždedant, arba kad figūra F lygi figūrai F_1, jei tenkinamos uždėjimo savybes nusakančios aksiomos.* Suformuluosime tas aksiomas.



340 pav.

7. *Jei uždedant sutapdinami dviejų atkarpų galai, tai sutapdinamos ir pačios atkarpos.*

8. *Kiekviename spindulyje nuo jo pradžios galima atidėti atkarpą, lygią duotai atkarpai, tačiau tik vieną.*

Tai reiškia štai ką. Jei duota kuri nors atkarpa AB ir kuris nors spindulys h, kurio pradžia O, tai yra toks vienintelis spindulio h taškas C, kad atkarpa AB lygi atkarpai OC.

9. *Nuo kiekvieno spindulio nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti kampą, lygų duotam neištiestiniam kampui, tačiau tik vieną.*

Tai reiškia štai ką. Jei duotas kuris nors spindulys OA ir kuris nors neištiestinis kampas CDE, tai kiekvienoje iš dviejų pusplokštumių, kurių kraštas OA, yra toks vienintelis spindulys OB, kad kampas CDE lygus kampui AOB.

10. *Kiekvieną kampą hk su jam lygiu kampu h_1k_1 sutapdinti uždedant galima dviem būdais: 1) taip, kad spindulys h sutaptų su spinduliu h_1, o spindulys k — su spinduliu k_1; 2) taip, kad spindulys h sutaptų su spinduliu k_1, o spindulys k — su spinduliu h_1.*

11. *Kiekviena figūra lygi jai pačiai.*

12. *Jei figūra F lygi figūrai F_1, tai figūra F_1 lygi figūrai F.*

13. *Jei figūra F_1 lygi figūrai F_2, o figūra F_2 lygi figūrai F_3, tai figūra F_1 lygi figūrai F_3.*

Matome, kad pateiktosios aksiomos atitinka figūrų uždėjimo ir lygumo vaizdinius, nekelia abejonių.

Toliau pateikiamos dvi aksiomos, susijusios su atkarpų matavimu. Prieš jas suformuluodami prisiminsime, kaip matuojamos atkarpos. Sakykime, AB — matuojamoji atkarpa, PQ — pasirinktasis atkarpų matavimo vienetas. Spindulyje AB atidėkime atkarpą $AA_1 = PQ$, spindulyje A_1B — atkarpą $A_1A_2 = PQ$ ir t. t., kol arba taškas A_n sutaps su tašku B, arba taškas B bus tarp taškų A_n ir A_{n+1}. Pirmuoju atveju sakoma, kad atkarpos AB ilgis, matuojant vienetu PQ, išreiškiamas skaičiumi n (arba kad atkarpa PQ atkarpoje AB išsitenka n kartų). Antruoju atveju galima sakyti, kad atkarpos AB ilgis, matuojant vienetu PQ, apytiksliai išreiškiamas skaičiumi n. Norint išmatuoti tiksliau, atkarpa PQ dalijama į lygias dalis (dažniausiai į 10 lygių dalių) ir viena iš tų dalių jau aprašytu būdu matuojama liekana A_nB. Jei atkarpos PQ dešimtoji dalis matuojamoje atkarpoje neišsitenka sveikąjį skaičių kartų, tai ta dalis irgi dalijama į 10 lygių dalių ir matuojama toliau. Laikome, kad taip galima išmatuoti kiekvieną atkarpą, t. y. jos ilgį pasirinktuoju matavimo vienetu išreikšti baigtine arba begaline dešimtaine trupmena. To teiginio trumpa formuluotė yra ši aksioma.

14. *Pasirinkus atkarpų matavimo vienetą, kiekvienos atkarpos ilgis išreiškiamas teigiamuoju skaičiumi.*

Dar viena aksioma išreiškia duoto ilgio atkarpos egzistavimą.

15. *Pasirinkus atkarpų matavimo vienetą, kiekvieną teigiamąjį skaičių atitinka atkarpa, kurios ilgį išreiškia tas skaičius.*

Planimetrijos aksiomų sistemą baigsime lygiagrečiųjų tiesių aksioma.

16. *Per tašką, nesantį tiesėje, eina tik viena tai tiesei lygiagreti tiesė.*

Pabrėžiame, kad geometrijai kurti galima pasirinkti įvairias aksiomų sistemas. Pavyzdžiui, vietoj lygiagrečiųjų tiesių aksiomos aksioma galime laikyti šitokį teiginį: trikampio kampų suma lygi 180°. Tada teiginys „per tašką, nesantį tiesėje, eina tik viena tai tiesei lygiagreti tiesė" būtų teorema; jį galima įrodyti (pabandykite įrodyti savarankiškai). Skirtingos aksiomų sistemos turi būti ekvivalenčios, t. y. iš jų turime gauti tas pačias išvadas.

Kartais stengiamasi, kad aksiomos būtų nepriklausomos, t. y. kad nė vienos jų nebūtų galima įrodyti remiantis kitomis. Čia tokio tikslo nekėlėme. Pavyzdžiui, 5 aksiomos teiginį galima įrodyti remiantis kitomis aksiomomis, t. y. tas teiginys faktiškai yra teorema, o ne aksioma. Tačiau, kad aiškinimas būtų paprastesnis, jį laikėme aksioma.

Pabaigoje išnagrinėsime vieną pirmųjų šio kurso teoremų — teoremą, išreiškiančią pirmąjį trikampių lygumo požymį (15 skyrelis). Ją įrodydami rėmėmės figūrų uždėjimo ir lygumo vaizdiniais, aksiomos sąvokos dar neturėjome. Priminsime tą įrodymą, jį išnagrinėsime, atsižvelgdami į dabar turimas aksiomas.

Reikėjo įrodyti: jei $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ ir $\angle A=\angle A_1$, tai trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs. Tam nagrinėjome tokį uždėjimą, kuriuo viršūnė A sutapdinama su viršūne A_1, o kraštinės AB ir AC uždedamos ant spindulių A_1B_1 ir A_1C_1. Rėmėmės akivaizdžiu faktu, kad taip uždėti galima, nes kampai A ir A_1 lygūs. Dabar galime sakyti, jog taip uždėti galima remiantis 10 aksioma. Toliau samprotavome taip: kadangi $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, tai kraštinė AB sutaps su kraštine A_1B_1, o kraštinė AC — su kraštine A_1C_1, skyrium imant, sutaps taškai B ir B_1, C ir C_1. Kaip tai pagrįsti aksiomomis? Labai paprastai. Remiantis 8 aksioma, spindulyje A_1B_1 nuo taško A_1 galima atidėti tik vieną atkarpą, lygią atkarpai AB. Tačiau, remiantis teoremos sąlyga, $AB=A_1B_1$, todėl taškas B sutaps su tašku B_1. Panašiai įrodytume, kad taškas C sutaps su tašku C_1. Norint pagrįsti, kad kraštinė BC sutaps su kraštine B_1C_1, reikia remtis 7 aksioma. Po to galima padaryti išvadą: trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ sutaps, vadinasi, jie lygūs.

Matome, kad pats pirmojo trikampių lygumo požymio teoremos įrodymas iš esmės nepasikeitė, tik dabar rėmėmės ne faktų akivaizdumu, bet aksiomomis, kurios tuos faktus išreiškia.

NAUDOJIMOSI TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ LENTELĖMIS PAVYZDŽIAI

Naudojantis V. Bradžio keturženklėmis matematinėmis lentelėmis galima rasti $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, kai $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$, apytiksles reikšmes. Kampo α reikšmes galima keisti kas $1'$ (žingsnis lygus $1'$), t. y. galima rasti $0°$, $0°1'$, $0°2'$ ir t. t. sinuso, kosinuso, tangento apytiksles reikšmes. Minėtų funkcijų reikšmes galima rasti 10^{-4} tikslumu (t. y. lentelėse rasta apytikslė reikšmė ne daugiau kaip 10^{-4} skiriasi nuo tikslios reikšmės). Naudojantis tomis lentelėmis dar galima rasti kampą α, kai žinomos $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ arba $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmės.

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
60°	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29°	*1*	*3*	*4*
61°	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28°	*1*	*3*	*4*
62°	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27°	*1*	*3*	*4*
63°	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26°	*1*	*3*	*4*
64°	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25°	*1*	*3*	*4*
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...				
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	*A*	1′	2′	3′

1 pavyzdys. Reikia rasti $\sin 61°30'$.

Ieškomą reikšmę randame lentelėje, kur susikerta $61°$ (užrašas kairėje) pažymėta eilutė ir $30'$ (užrašas viršuje) pažymėtas stulpelis: $\sin 61°30'=0{,}8788$.

Pastaba. Skaičius 0,8788 yra $\sin 61°30'$ apytikslė reikšmė, tačiau užuot rašę $\sin 61°30'\approx0{,}8788$ dažniausiai rašome šitaip: $\sin 61°30'=0{,}8788$.

2 pavyzdys. Reikia rasti $\sin 116°46'$.

Remiantis redukcijos formule, $\sin 116°46'=\sin(180°-63°14')=$ $=\sin 63°14'$, todėl uždavinys pakeičiamas $\sin 63°14'$ radimu.

Lentelėje randame kampo, artimiausio $63°14'$ kampui, sinusą: $\sin 63°12'=0{,}8926$. Po to lentelės dešinėje pusėje toje pačioje

eilutėje pataisų stulpeliuose randame pataisą, atitinkančią $14' - 12' = 2'$. Ji lygi 0,0003. Atsižvelgę į tai, kad $\sin 63°12' < \sin 63°14'$, tą pataisą prie 0,8926 pridedame: $\sin 63°14' = 0,8926 + 0,0003 = 0,8929$.

3 p a v y z d y s. Reikia rasti $\cos 152°$.

Remiantis redukcijos formule, $\cos 152° = \cos(180° - 28°) = -\cos 28°$, todėl uždavinys pakeičiamas $\cos 28°$ radimu. Ieškomą reikšmę randame lentelėje, kur susikerta 28° (užrašas dešinėje) pažymėta eilutė ir 0′ (užrašas apačioje) pažymėtas stulpelis: $\cos 28° = 0,8829$. Vadinasi, $\cos 152° = -0,8829$.

4 p a v y z d y s. Reikia rasti $\cos 26°35'$.

Lentelėje randame kampo, artimiausio duotam kampui, kosinusą: $\cos 26°36' = 0,8942$. Po to pataisų lentelėje dešinėje pusėje randame pataisą, atitinkančią $36' - 35' = 1'$. Ji lygi 0,0001. Kadangi $\cos 26°35' > \cos 26°36'$, tai rastą pataisą prie 0,8942 pridedame. Gauname $\cos 26°35' = 0,8942 + 0,0001 = 0,8943$.

Skaičiuojant su elektroninėmis skaičiavimo mašinomis, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\mathrm{tg}\, \alpha$ reikšmių lentelėse neieškoma (tos lentelės užimtų daug mašinos atminties). Jas su visomis α reikšmėmis reikiamu tikslumu apskaičiuoja mašina. Tam panaudojamos vadinamos standartinės trigonometrinių funkcijų reikšmių apskaičiavimo programos. Tos programos iš anksto įvestos į ESM ir, kai reikia apskaičiuoti duoto kampo α kurios nors trigonometrinės funkcijos reikšmę, pati mašina kreipiasi į atitinkamą standartinę programą ir apskaičiuoja tą reikšmę. Tokio tipo standartinės programos įvestos ir į skaičiuotuvus.

3 priedas

ŠIEK TIEK ŽINIŲ APIE GEOMETRIJOS KŪRIMĄ

Pirmasis veikalas, kuriame yra paprasčiausių geometrijos žinių, mus pasiekė iš Senovės Egipto. Jis priklauso XVII a. pr. Kr. Tame veikale yra tam tikrų figūrų plotų ir tam tikrų kūnų tūrių apskaičiavimo taisyklės. Tos taisyklės gautos praktiškai, kad jos teisingos, jokio loginio įrodymo nėra.

Geometrija kaip matematikos šaka atsirado vėliau. Ji siejama su graikų matematikais Taliu (apie 625—547 m. pr. Kr.), Pitagoru (apie 580—500 m. pr. Kr.), Demokritu (apie 460—370 m. pr. Kr.), Euklidu (III a. pr. Kr.). Įžymiame Euklido veikale „Pradmenys" susistemintos visos tuo laiku turėtos geometrijos žinios. Svarbiausia tai, kad „Pradmenyse" išreikštas aksiominis geometrijos kūrimo būdas. Jo esmė ta, kad pradžioje formuluojami pradiniai teiginiai (aksiomos), po to, remiantis jomis, loginiais samprotavimais įrodomi kiti teiginiai (teoremos) [1]. Gautieji rezultatai taikomi ir praktikoje, ir tolesniuose moksliniuose tyrimuose. Kai kurios Euklido pasiūlytos aksiomos yra ir dabartiniame geometrijos kurse. Pavyzdžiui: „Per bet kuriuos du taškus eina tiesė, tačiau tik viena".

Daug nuveikė kurdami geometriją Archimedas (apie 287—212 m. pr. Kr.), Apolonijas (III a. pr. Kr.) ir kiti senovės graikų mokslininkai.

Kokybiškai naujas geometrijos kūrimo etapas prasidėjo po kelių šimtmečių — XVII a. — ir buvo susijęs su tuo metu sukauptomis algebros žiniomis. Įžymusis prancūzų matematikas ir filosofas R. Dekartas (1596—1650) pasiūlė naują geometrijos uždavinių sprendimo metodą. Veikale „Geometrija" (1637) jis pateikė koordinačių metodą, susiedamas geometriją su algebra. Taip atsirado galimybė daugelį geometrijos uždavinių spręsti algebros metodais.

Geometrijos kūrimą spartino aksioma, kuri Euklido „Pradmenyse" vadinama penktuoju postulatu. Tai susiję su noru turėti kiek galima mažiau aksiomų. Euklido penktojo postulato formuluotė gana sudėtinga [2]. Todėl dažnai jis keičiamas jam ekvivalen-

---

[1] Kad toks būdas gali būti, pirmasis nurodė graikų mokslininkas Aristotelis (apie 384—322 m. pr. Kr.).

[2] Penktasis postulatas šitoks: „jei tiesė, kertanti dvi tieses, sudaro vienoje pusėje vienašalius kampus, kurie mažesni už du stačiuosius, tai neribotai pratęstos tiesės susikerta toje pusėje, kurioje kampai mažesni už du stačiuosius".

čia lygiagrečiųjų tiesių aksioma: per tašką, nesantį tiesėje, eina tik viena jai lygiagreti tiesė.

Daugelį šimtmečių nemaža matematikų stengėsi įrodyti penktąjį postulatą. Tai susiję su tuo, kad buvo stengiamasi sudaryti mažiausią aksiomų sistemą. Mokslininkai manė, kad penktąjį postulatą galima įrodyti remiantis kitomis aksiomomis.

XVIII amžiaus pabaigoje daliai matematikų kilo mintis, jog penktojo postulato negalima įrodyti. Tą klausimą išsprendė rusų matematikas Nikolajus Lobačevskis (1792—1856).

Visa N. Lobačevskio kūrybinė veikla susijusi su Kazanės universitetu. Ten jis mokėsi, po to buvo profesorius, o nuo 1827 m. — rektorius. Jis labai susidomėjo geometrija, ir, kaip ir daugelis jo pirmtakų, bandė įrodyti penktąjį Euklido postulatą. N. Lobačevskis bandė jį įrodyti prieštaros metodu — tardamas, kad per tašką, nesantį tiesėje, eina keletas tiesių, nekertančių duotos tiesės. Šitaip jis bandė įrodyti teiginį, kuris prieštarautų kitoms aksiomoms arba įrodytoms teoremoms. Jei tokį teiginį būtų pavykę gauti, tai išeitų, kad prielaida neteisinga. Vadinasi, būtų teisingas priešingas teiginys: per tašką, nesantį duotoje tiesėje, eina tik viena jos nekertanti tiesė. Taigi penktasis Euklido postulatas būtų įrodytas.

Tačiau prieštaraujančių teiginių Lobačevskis negavo. Tuo remdamasis jis padarė svarbią išvadą: galima sukurti geometriją, kuri būtų kitokia nei Euklido geometrija. Tokią geometriją jis sukūrė. Dabar ji vadinama Lobačevskio geometrija. Pranešimą apie naujos geometrijos sukūrimą Lobačevskis paskelbė 1826 m.

Panašias išvadas gavo vengrų matematikas J. Bojajis (1802—1860), tačiau tuos rezultatus paskelbė vėliau, 1832 m. Žymiojo vokiečių matematiko K. Gauso (1777—1855) rankraščiuose išreikštos idėjos, artimos Lobačevskio ir Bojajo idėjoms, tačiau jis, vengdamas kritikos, jų nesiryžo skelbti.

Lobačevskio sukurta nauja geometrija paskatino mokslo plėtotę. Lobačevskio geometrija plačiai taikoma gamtos moksluose. Labai didelė naujosios geometrijos įtaka pačios geometrijos plėtotei. Ji ryškiausiai pasireiškė gilinant žinias apie mus supančią erdvę. Juk iki Lobačevskio atrodė, kad tos erdvės geometrija gali būti tik euklidinė. Dabar mokslo nustatyta, kad euklidinė geometrija tik apytiksliai, nors ir pakankamai dideliu tikslumu, apibūdina mus supančią erdvę. Kosminiu mastu ji labai skiriasi nuo realiosios erdvės geometrijos.

XIX amžiuje geometrija pasipildė naujais svarbiais atradimais. Pavyzdžiui, žymus vokiečių matematikas B. Rymanas (1826—1866) sukūrė geometriją, bendresnę ir už Euklido geometriją, ir už Lobačevskio geometriją.

Galima paklausti: ar Euklido geometrija ir Lobačevskio geometrija neprieštaringos? Ar negali būti, kad toliau plėtodami vieną ar kitą geometriją gausime prieštaringas išvadas? Tas klausimas glaudžiai susijęs su aksiomų sistemos, kuria grindžia-

ma viena ar kita geometrija, neprieštaringumo, pilnumo ir nepriklausomumo problemomis. Tos problemos nagrinėjamos vadinamame „Geometrijos pagrindų“ kurse. Svarbiausias indėlis sprendžiant tas problemas tenka žymiam vokiečių matematikui D. Hilbertui (1862—1943).

Čia palietėme tik keletą geometrijos istorijos momentų. Smulkiau su tais klausimais galima susipažinti papildomoje literatūroje [1].

Pabrėžiame, kad dabar geometrija taikoma įvairiose gamtos mokslo srityse: fizikoje, chemijoje, biologijoje ir kt. Jos reikšmė neįkainojama taikomiesiems mokslams: mašinų gamybai, geodezijai, kartografijai. Geometrijos metodai plačiai taikomi praktiškai visose mokslo ir technikos srityse, ir pačioje matematikoje.

---

[1] Žr.: Геометрия // БСЭ.— 3-е изд.— М.: Советская энциклопедия, 1971.— Т. 6.— С. 307—313.

Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики.— М.: Наука, 1984.

4 priedas

PLANIMETRIJOS NUOSTABIOS TEOREMOS

Geometrijos kurse jau išnagrinėjome plokštumos geometrinių figūrų svarbias ir įdomias savybes. Tačiau daug nuostabių priklausų ir geometrinių faktų į pagrindinį kursą neįėjo. Išnagrinėsime dar keletą nuostabių planimetrijos teoremų.

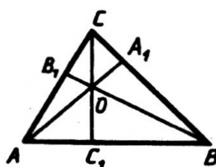
Čevos teorema. Žinome, kad: trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške; trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške; trikampio aukštinės (arba jų tęsiniai) susikerta viename taške.

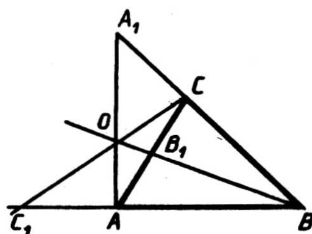
Dabar suformuluosime bendresnį klausimą. Išnagrinėkime trikampį ABC, jo kraštinėse BC, CA ir AB (arba jų tęsiniuose) pažymėkime taškus A_1, B_1 ir C_1 (341 pav.). Kaip turi būti išsidėstę tie taškai, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikirstų viename taške? Į tą klausimą atsako Čevos teorema.

Prieš formuluodami teoremą, susitarsime štai ką. Sakykime, $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ — nenuliniai kolinearūs vektoriai. Jų ilgių santykis lygus $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$. Prieš jį rašysime ženklą „+“, kai vektoriai vienakrypčiai, ir ženklą „—“, kai vektoriai priešpriešiai. Dabar suformuluosime Čevos teoremą.

Teorema. ***Sakykime, trikampio ABC kraštinėse BC, CA ir AB arba jų tęsiniuose pažymėti su trikampio viršūnėmis nesutampantys taškai A_1, B_1 ir C_1. Jei tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške arba yra papóriui lygiagrečios, tai***

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1. \qquad (1)$$





341 pav.

Atvirkščiai: ***jei teisinga (1) lygybė, tai tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 arba susikerta viename taške, arba paporiui lygiagrečios.***

Į r o d y m a s. 1^0. Iš pradžių tarkime, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta taške O (341 pav., a, b). Trikampio plotą žymėkime $\overline{S}_{PQR}$. Kai viršūnės P, Q ir R apeinamos prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį, prieš $\overline{S}_{PQR}$ rašomas ženklas „+“, kai jos apeinamos pagal laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį, — ženklas „—“.

Tada $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\dfrac{\overline{S}_{ABA_1}}{\overline{S}_{AA_1C}}$. Iš čia $\overline{S}_{ABA_1}=\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\overline{S}_{AA_1C}$.

Taip pat $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\dfrac{\overline{S}_{OBA_1}}{\overline{S}_{OA_1C}}$. Iš čia $\overline{S}_{OBA_1}=\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\overline{S}_{OA_1C}$.

Vadinasi,

$$\frac{\overline{S}_{ABO}}{\overline{S}_{AOC}}=\frac{\overline{S}_{ABA_1}-\overline{S}_{OBA_1}}{\overline{S}_{AA_1C}-\overline{S}_{OA_1C}}=\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{S}_{AA_1C}-\overline{S}_{OA_1C}}{\overline{S}_{AA_1C}-\overline{S}_{OA_1C}}=\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}.$$

Taigi $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\dfrac{\overline{S}_{ABO}}{\overline{S}_{AOC}}$. Taip pat gautume

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{S}_{BCO}}{\overline{S}_{BOA}}\ \text{ir}\ \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{S}_{CAO}}{\overline{S}_{COB}}.$$

Tas lygybes sudauginę ir atkreipę dėmesį į tai, kad

$$\overline{S}_{ABO}=\overline{S}_{BOA},\ \overline{S}_{AOC}=\overline{S}_{CAO}\ \text{ir}\ \overline{S}_{BCO}=\overline{S}_{COB},$$

gauname:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{S}_{BOA}}{\overline{S}_{CAO}}\cdot\frac{\overline{S}_{COB}}{\overline{S}_{BOA}}\cdot\frac{\overline{S}_{CAO}}{\overline{S}_{COB}}=1,$$

t. y. (1) lygybė teisinga.

Atvejį, kai tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 lygiagrečios, išnagrinėkite savarankiškai.

2^0. Dabar tarkime, kad (1) lygybė teisinga. Išnagrinėkime tieses AA_1 ir BB_1. Tarkime, kad jos susikerta kuriame nors taške O. Nubrėžkime tiesę CO. Jos ir tiesės AB susikirtimo tašką pažymėkime C_2. Remiantis 1^0,

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}}=1.$$

Iš šios lygybės ir (1) lygybės išplaukia, kad $\dfrac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}}=\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}$.

Tuos santykius pažymėję raide λ, gauname $\overrightarrow{AC_2}=\lambda\overrightarrow{C_2B}$ ir $\overrightarrow{AC_1}=$ $=\lambda\overrightarrow{C_1B}$. Iš vienos lygybės atimkime kitą. Gausime:

$$\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AC_1}=\lambda(\overrightarrow{C_2B}-\overrightarrow{C_1B}),\ \text{arba}\ \overrightarrow{C_1C_2}=\lambda\overrightarrow{C_2C_1}=-\lambda(\overrightarrow{C_1C_2}).$$

Atkreipiame dėmesį į tai, kad $\lambda\neq-1$ (priešingu atveju gautume

$\overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{C_1B}$, t. y. $\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{C_1A}$; tačiau taip negali būti, nes taškai A ir B nesutampa). Vadinasi, $\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$, t. y. taškai C_1 ir C_2 sutampa. Tai reiškia, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške (taške O).

Panašiai įrodoma: jei $AA_1 \| BB_1$, tai ir $CC_1 \| BB_1$. Teorema įrodyta.

Remdamiesi Čevos teorema, įrodykite šiuos teiginius:

1. Trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške.
2. Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške.
3. Trikampio aukštinės (arba jų tęsiniai) susikerta viename taške.
4. Atkarpos, jungiančios trikampio viršūnes su taškais, kuriuose įbrėžtinis apskritimas liečia prieš jas esančias kraštines, susikerta viename taške.
5. Tiesės, einančios per trikampio viršūnes ir jo perimetrą dalijančios pusiau, susikerta viename taške.
6. Atkarpos, jungiančios apibrėžtinio šešiakampio priešingas viršūnes, susikerta viename taške (Brianšono teorema).

Remdamiesi Brianšono teorema įrodykite šį teiginį.

7. Apie apskritimą apibrėžto keturkampio $ABCD$ įstrižainė BD eina per tiesių, jungiančių viršūnes A ir C su apskritimo bei tiesių CD ir AD lietimosi taškais, susikirtimo tašką.

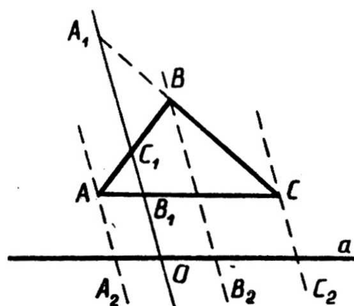
Menelajo teorema. Vėl išnagrinėkime trikampį ABC, kurio kraštinėse BC, CA ir AB (arba jų tęsiniuose) pažymėti taškai A_1, B_1 ir C_1. Žinome, kada tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške arba paporiui lygiagrečios (Čevos teorema). Kada taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje? Į tą klausimą atsako Menelajo teorema.

Teorema. ***Sakykime, trikampio ABC kraštinėse BC, CA ir AB (arba jų tęsiniuose) pažymėti su jo viršūnėmis nesutampantys taškai A_1, B_1 ir C_1. Jei taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje, tai***

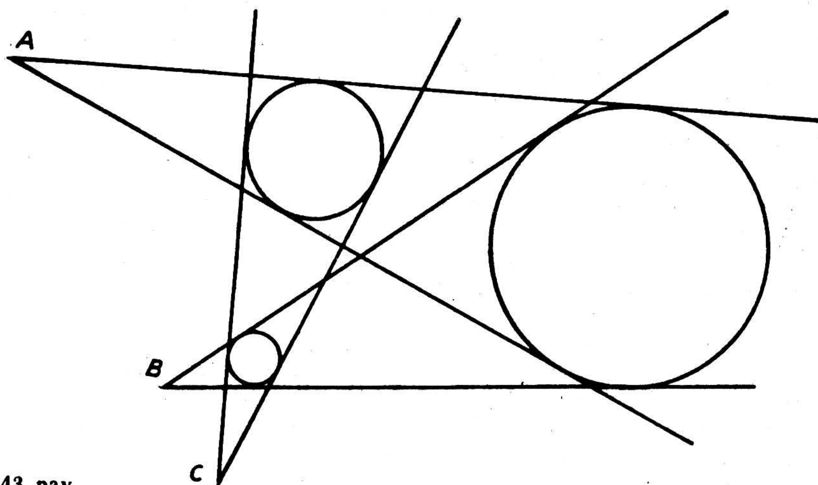
$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1. \quad (2)$$

Atvirkščiai: ***jei teisinga (2) lygybė, tai taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje.***

Įrodymas. Tarkime, kad taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje (342 pav.). Per kurį nors tos tiesės tašką O nubrėžkime bet kokią tiesę a, o per trikampio viršūnes — tieses, lygiagrečias tiesei A_1C_1. Jų ir tiesės a susikirtimo taškus pažymėkime A_2, B_2 ir C_2. Remiantis 558 uždaviniu,



342 pav.



343 pav.

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\frac{\overline{B_2O}}{\overline{OC_2}},\quad \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{C_2O}}{\overline{OA_2}},\quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{A_2O}}{\overline{OB_2}},$$

arba

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{OB_2}}{\overline{OC_2}},\quad \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=-\frac{\overline{OC_2}}{\overline{OA_2}},\quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=-\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}}.$$

Tas lygybes sudauginę gauname:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=-\frac{\overline{OB_2}}{\overline{OC_2}}\cdot\frac{\overline{OC_2}}{\overline{OA_2}}\cdot\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}}=-1.$$

Teoremos pirmoji dalis įrodyta. Antros dalies įrodymas panašus į Čevos teoremos 2^0 dalies įrodymą. Įrodykite savarankiškai.

Remdamiesi Menelajo teorema įrodykite šiuos teiginius:

1. Iš bet kurio apie trikampį apibrėžto apskritimo taško į tieses, kuriose yra trikampio kraštinės, nuleistų statmenų pagrindai yra vienoje tiesėje (Simpsono tiesė).
2. Atkarpos, kuri jungia keturkampio priešingų kraštinių tęsinių susikirtimo taškus, vidurys yra tiesėje, einančioje per įstrižainių vidurio taškus (Gauso teorema).
3. Taškai A, B ir C (343 pav.) yra vienoje tiesėje.
4. Jei įbrėžtinio šešiakampio priešingos kraštinės nelygiagrečios, tai tų kraštinių tęsinių susikirtimo taškai yra vienoje tiesėje (Paskalio teorema).

Remdamiesi Paskalio teorema įrodykite šiuos teiginius.

5. Trikampio kraštinių tęsinių ir apie trikampį apibrėžto apskritimo liestinių prieš kraštines esančiose viršūnėse susikirtimo taškai yra vienoje tiesėje.
6. Į apskritimą įbrėžto keturkampio $ABCD$ kraštinių AB ir CD tęsinių susikirtimo taškas, tiesės BC ir apskritimo liestinės taške D susikirtimo taškas bei tiesės AD ir apskritimo liestinės taške C susikirtimo taškas yra vienoje tiesėje.
7. Apskritimo liestinių į jį įbrėžto keturkampio $ABCD$ viršūnėse B ir D susikirtimo taškas, tiesių AB ir CD susikirtimo taškas bei tiesių AD ir BC susikirtimo taškas yra vienoje tiesėje.

ATSAKYMAI IR NURODYMAI

I skyrius

3. Tris taškus arba vieną tašką. **4.** Keturias tieses. **6.** Tris atkarpas. **15.** Keturis. **17.** h ir l. **18.** $OB<OA$; $OC>OA$; $OB<OC$. **19.** a) Taip; b) ne. **21.** $\angle AOC<$ $<\angle AOB$. **22.** a) Taip; b) ne. **29.** Du taškus. **30.** 10,3 cm. **31.** a) 3,5 cm; b) 36 mm. **32.** 25,5 cm arba 1,5 cm. **33.** 9 cm arba 23 cm. **34.** $BD=47$ cm, $DA=17$ cm. **35.** 480 km. **37.** a) $AC=1$ cm, $CB=1$ cm, $AO=0{,}5$ cm, $OB=1{,}5$ cm; b) $AB=6{,}4$ m, $AC=3{,}2$ m, $AO=1{,}6$ m, $OB=4{,}8$ m. **38.** a) 10,5 cm; b) 1,5 cm. **39.** $\frac{a}{2}$. **40.** 4 cm. **44.** Ne. Nubraižyti galima tada, kai kampas AOB smailusis. **45.** Taip. **47.** a) 121°; b) 121°2′. **48.** 48°. **49.** 85°. **50.** 81°. **51.** 60°. **52.** 160°. **53.** Ne. **58.** a) 69°; b) 90°; c) 165°. **59.** Statusis. **60.** Taip. **61.** a) 70° ir 110°; b) 150° ir 30°; c) 113°39′ ir 66°21′; d) 135° ir 45°; e) 100° ir 80°. **62.** 106°. **63.** Taip. **64.** a) $\angle 1=\angle 3=63°$, $\angle 4=117°$; b) $\angle 1=43°27'$, $\angle 2=\angle 4=136°33'$. **65.** a) 57°, 57°, 123°, 123°; b) 40°, 40°, 140°, 140°. **66.** a) $\angle 2=\angle 4=110°$, $\angle 1=\angle 3=70°$; b) $\angle 1=\angle 3=45°$, $\angle 2=\angle 4=135°$; c) $\angle 1=\angle 3=75°$, $\angle 2=$ $=\angle 4=105°$. **67.** 180°. **68.** $\angle AOC=120°$, $\angle BOD=130°$; $\angle COE=110°$, $\angle COD=60°$. **69.** Negali. **71.** Šešias tieses. **72.** Šeši taškai. **73.** Dvylika kampų. **74.** a) 8 cm; b) 16 cm. **75.** 16 cm arba 4 cm. **76.** a) $\frac{7}{8}a$; b) $\frac{5}{8}a$. **77.** a) $\frac{2}{3}m$; b) $\frac{4}{5}m$. **78.** 12 cm. **79.** N u r o d y m a s. Reikia išnagrinėti du atvejus: taškai B ir C yra skirtingose arba vienoje taško A pusėje. **80.** 85° arba 15°. **81.** 30° arba 90°. **82.** a) 67°30′ ir 112°30′; b) 72°30′ ir 107°30′. **83.** 90°. **85.** N u r o d y m a s. Įrodykite, kad kampas ABD — ištiestinis. **86.** N u r o d y m a s. Tarkite, kad tiesės m ir n sutampa, po to taikykite 12 skyrelio teiginį.

II skyrius

90. 75 cm. **91.** 12,7 cm ir 17,3 cm. **92.** Ne. **93.** b) 42°, 47°. **94.** b) $BD=5$ cm, $AB=15$ cm. **95.** b) $AB=14$ cm, $BC=17$ cm. **96.** b) 110°. **105.** b) 46°. **106.** b) 96°. **107.** 10 cm, 20 cm ir 20 cm. **108.** $AB=12{,}5$ cm ir $BC=15$ cm. **109.** 8 cm. **112.** 50°. **113.** b) 37°30′. **115.** $\angle A=\angle B+\angle C$. **119.** $KF=8$ cm, $\angle DEK=86°$, $\angle EFD=90°$. **121.** b) $BC=15$ cm, $CO=13$ cm. **122.** b) $AB=$ $=11$ cm, $BC=19$ cm. **126.** 13 cm. **136.** 25°. **142.** N u r o d y m a s. Reikia išnagrinėti du atvejus: a) taškas B yra spindulyje AO; b) taškas B yra spindulio AO tęsinyje. **145.** 90°. **146.** 29 cm. **149.** Ne. **150.** Ne. **152.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubrėžti kampo AOB pusiaukampinę. **155.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubraižyti statųjį kampą. **156.** $AB=4$ cm, $AC=5$ cm, $BC=$ $=6$ cm. **157.** 7 cm, 5 cm ir 5 cm. **158.** 10 cm arba 6 cm. **160.** N u r o d y m a s.

b) Sakykime, M — taškas, vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, bet nesantis tiesėje AB. Po to remtis teiginiu: lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą, yra aukštinė. **165.** N u r o d y m a s. b) Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\angle AOK = \angle BOK_1$. **166.** N u r o d y m a s. Žr. 165 uždavinį. **167.** N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite, kad trikampiai DBF, FCE ir EAD lygūs. **168.** 40°. **169.** N u r o d y m a s. Įrodykite, kad $\triangle ABO = \triangle FEO$. **170.** N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite, kad trikampiai ABD ir $A_1B_1D_1$ lygūs. **171.** N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite, kad trikampiai ABC ir ADC lygūs. **172.** N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite trikampių ABC ir ABD lygumą. **173.** N u r o d y m a s. Sakykime, kampas BAD — trikampio ABC kampui A gretutinis kampas. Nelygybei $\angle BAD > \angle B$ įrodyti pažymėkite kraštinės AB vidurį O ir atkarpos CO tęsinyje atidėkite atkarpą OE, lygią CO. Po to įrodykite, kad kampas BAE lygus trikampio ABC kampui B ir pritaikykite nelygybę $\angle BAD > \angle BAE$. **174.** N u r o d y m a s. Trikampį ABC ant trikampio $A_1B_1C_1$ uždėkite taip, kad kraštinė BC sutaptų su kraštine B_1C_1, o kraštinė BA atsidurtų ant spindulio BA_1. Įrodydami, kad taškas A sutaps su tašku A_1, remkitės 173 uždaviniu. **175.** N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite, kad $\triangle AOD = \triangle BOC$, po to, kad $\triangle EBD = \triangle EAC$. **176.** N u r o d y m a s. Išnagrinėkite trikampius ABD ir $A_1B_1D_1$; čia taškai D ir D_1 parinkti taip, kad M ir M_1 — atkarpų AD ir A_1D_1 vidurio taškai. **178.** N u r o d y m a s. Sakykime, taškas B yra atkarpoje AC. Tarkime, kad $AD = BD = CD$. Pritaikę lygiašonio trikampio kampų prie pagrindo savybę iš pradžių įrodykite, kad $\angle ABD = \angle CBD = 90°$. **179.** N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite, kad $BP = CQ$. **184.** N u r o d y m a s. Pasiremkite 160 uždaviniu.

III skyrius

196. Vieną tiesę. **197.** Trys arba keturios. **198.** Taip. **201.** 105°, 105°. **202.** $a \| c$. **203.** b) Keturi kampai po 55°, kiti keturi kampai po 125°. **205.** 92°. **206.** a) Taip; b) taip. **207.** a) Ne; b) taip. **208.** 115° ir 65°. **209.** $\angle 1 = 135°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 135°$. **210.** N u r o d y m a s. Išnagrinėkite spindulio CP_3 tęsinį. **215.** 59°. N u r o d y m a s. Pirma įrodykite, kad $a \| b$. **216.** 48°, 66°, 66°. **218.** Taip. **219.** N u r o d y m a s. Įrodykite prieštaros metodu. **220.** N u r o d y m a s. Įrodykite prieštaros metodu. **221.** N u r o d y m a s. Pirma įrodykite, kad $AM \| BC$ ir $AN \| BC$.

IV skyrius

223. a) 58°; b) 26°; c) $180° - 3\alpha$; d) 60°. **224.** $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. **227.** a) 36°, 72° ir 72°; b) 45°, 45° ir 90°. **228.** a) 40°, 40° ir 100° arba 40°, 70° ir 70°; b) 60°, 60° ir 60°; c) 100°, 40° ir 40°. **229.** 105°. **230.** 103°. **231.** N u r o d y m a s. Remkitės lygiašonio trikampio kampų prie pagrindo savybe. **232.** Taip. **233.** N u r o d y m a s. Reikia atsižvelgti į tai, kad priekampis, kurio viršūnė yra prieš trikampio pagrindą esanti viršūnė, du kartus didesnis už trikampio kampą prie pagrindo. **234.** 57°30′, 57°30′, 65° arba 65°, 65°, 50°. **235.** 73°20′, 73°20′ ir 33°20′. **248.** a) Ne; b) ne. **249.** Kraštinė, lygi 10 cm. **250.** a) 5 cm arba 3 cm; b) 8 cm; c) 10 cm. **252.** 29 cm ir 29 cm. **253.** 7 cm, 7 cm ir 11 cm. **254.** 45°, 45° ir 90°. **255.** 27°. **256.** 17,6 cm. **257.** $AC = 6$ cm, $AB = 12$ cm. **258.** 9 cm. **259.** 18 cm. **260.** 30°, 30° ir 120°. **261.** N u r o d y m a s.

Reikia remtis 35 skyrelio pirmąja teorema. **262.** N u r o d y m a s. Reikia remtis stačiųjų trikampių lygumo požymiais. **263.** 70°, 70° ir 40°. **264.** 122°. **265.** 90°, 39° ir 51°. **267.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad kampai, esantys prie duotų trikampių lygių kraštinių, lygūs. **269.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 268 uždaviniu. **270.** N u r o d y m a s. Reikia nubrėžti kampo pusiaukampinę ir remtis 133 uždaviniu. **271.** 8 cm. **272.** 12 cm. **273.** 14 cm. **275.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad CM — trikampio ABC pusiaukraštinė. **277.** 2 cm arba 8 cm. **278.** 3 cm. **279.** N u r o d y m a s. Per vieną tašką, tenkinantį uždavinio sąlygas, reikia nubrėžti tiesę d, lygiagrečią duotai tiesei, ir taikyti 37 skyrelio teoremą. Po to įrodyti, kad kiekvienas plokštumos taškas, nesantis tiesėje d, uždavinio sąlygos netenkina. **280.** Spindulys, kurio pradžia kraštinėje BA, lygiagretus kraštinei BC. N u r o d y m a s. Reikia remtis 279 uždaviniu. **281.** Tiesė, lygiagreti duotoms tiesėms ir vienodai nutolusi nuo jų. **282.** Reikia remtis 281 uždaviniu. **283.** Dvi tiesės, lygiagrečios duotai tiesei, esančios skirtingose jos pusėse ir vienodai nutolusios nuo jos. **285.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 284 uždaviniu. **299.** 20°. **300.** N u r o d y m a s. Reikia įrodyti prieštaros metodu. **302.** N u r o d y m a s. a) Reikia tarti, kad $HM_1 \neq HM_2$ ir remtis 301 uždaviniu; b) reikia tarti, kad $HM_1 > HM_2$ arba $HM_1 = HM_2$ ir remtis 301 uždaviniu. **303.** Kelio ir atkarpos A_1B susikirtimo taške; taškas A_1 yra galas atkarpos AA_1, per kurios vidurį eina kelias ir yra jai statmenas. **304.** N u r o d y m a s. Sakykime, N — tiesės BM ir atkarpos AC susikirtimo taškas. Trikampiams ABN ir MNC reikia taikyti trikampio nelygybės teoremą. **305.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 304 uždaviniu. **306.** N u r o d y m a s. Reikia įrodyti prieštaros metodu. **308.** 18,5 cm. **311.** Dvi tiesės, kurios eina per pusiaukampines kampų, gautų susikirtus duotoms tiesėms. **312.** N u r o d y m a s. Sakykime, trikampio ABC $AC > AB$, o AM — duotoji atkarpa. Reikia atsižvelgti į tai, kad trikampio ACM $\angle C < \angle M$. **313.** N u r o d y m a s. Sakykime, $\triangle ABC$ — ieškomasis, BM — duotoji pusiaukraštinė. Iš pradžių reikia nubraižyti $\triangle BB_1C$, kurio kraštinės BB_1 vidurys yra taškas M. **314.** N u r o d y m a s. b) Reikia nubraižyti kampą, lygų duotajam, po to remtis 284 uždaviniu. **315.** a) N u r o d y m a s. Reikia remtis 34 skyrelio 3 savybe ir 314c uždaviniu. **316.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 282 uždaviniu. **317.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 245 uždaviniu. **318.** N u r o d y m a s. Kraštinėse BC ir AB reikia nubrėžti taškus A_1 ir C_1, kad $BA_1 = AC_1 = CB_1$. **319.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubraižyti statųjį trikampį, kurio įžambinė lygi duotai pusiaukampinei, o statinis — duotai aukštinei. **320.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubraižyti statųjį trikampį, kurio įžambinė lygi duotai pusiaukraštinei, o statinis — duotai aukštinei. **321.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubrėžti kampo C pusiaukampinę.

Sunkesni uždaviniai

322. $ab = 1$. **323.** $\frac{n}{m}$. **324.** N u r o d y m a s. Reikia remtis gretutinių kampų savybe: $\angle hk + \angle hl = 180°$. **325.** 180°. **326.** N u r o d y m a s. Sakykime, trys iš duotųjų tiesių eina per tašką A. Taikant prieštaros metodą reikia įrodyti, kad kiekviena iš kitų trijų tiesių eina per tą tašką. **327.** N u r o d y m a s. Sakykime, trys iš duotųjų taškų yra tiesėje d. Taikydami prieštaros metodą įrodykite,

kad kiekvienas iš kitų keturių taškų yra tiesėje d. **328.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle AOC_1 = \triangle BOC_2$; čia O — atkarpos AB vidurys. **329.** Nurodymas. Sakykime, trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ ir $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Kraštines AB ir A_1B_1 pratęskite atkarpomis $BD = BC$ bei $B_1D_1 = B_1C_1$ ir išnagrinėkite trikampius ADC ir $A_1D_1C_1$. **330.** Gali. Pavyzdžiui, lygiašonis trikampis ABC, kurio pagrindas AB, ir trikampis ABD, kurio viršūnė D yra kraštinės BC taškas; $AB = AD$. **331.** Gali. Išnagrinėkime, pavyzdžiui, lygiašonį trikampį ABC, kurio pagrindas AB, ir kraštinės AB tęsinyje pažymėkime kurį nors tašką D. Trikampiai ADC ir DBC pasižymi nurodytąja savybe, tačiau nelygūs. **332.** Nurodymas. Reikia remtis 174 uždaviniu. **333.** $90° - \frac{\alpha}{2}$. **335.** a) Smailusis; b) smailusis. **336.** Nurodymas. Reikia remtis trikampio kraštinių ir kampų priekIausa bei trikampio kampų sumos teorema. **337.** 70°. Nurodymas. Sakykime, O — kampo A pusiaukampinės ir tiesės BM susikirtimo taškas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad trikampiai AOC ir MOC lygūs. **338.** Nurodymas. Reikia vieną iš atkarpos galų sujungti su trikampio viršūne ir pasiremti 312 uždaviniu. **339.** Nurodymas. Reikia remtis 173 uždaviniu bei trikampio kraštinių ir kampų priekIausomis. **340.** Nurodymas. Atkarpą AD reikia pratęsti tol, kol kirs BC, ir remtis 312 uždaviniu. **341.** Nurodymas. Kraštinėje AB pažymėti tokį tašką C_1, kad $AC_1 = AC$, ir išnagrinėti trikampį BC_1D. **342.** Nurodymas. Reikia įrodyti prieštaros metodu. **343.** Nurodymas. Sakykime, ABC — nagrinėjamas trikampis, $AB > BC$, BM — pusiaukraštinė. Pažymėkite tokį tašką E, kad M būtų atkarpos BE vidurys, ir išnagrinėkite trikampį ABE. **344.** Nurodymas. Reikia remtis 173 uždaviniu. **345.** Nurodymas. Atkarpą BA pratęsus atkarpa $AD = AC$ ir išnagrinėjus $\triangle DHB$, pritaikyti trikampio nelygybę. **346.** Nurodymas. Reikia remtis 300 ir 341 uždaviniu. **347.** Nurodymas. Reikia remtis 341 ir 346 uždaviniu. **349.** Nurodymas. Sakykime, trikampio ABC pusiaukraštinė AM ir aukštinė AH kampą A dalija į tris lygius kampus BAH, HAM ir MAC. Reikia nubrėžti statmenį MD į kraštinę AC ir įrodyti, kad $MD = \frac{1}{2}MC$. **350.** Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad stačiojo trikampio įžambinė didesnė už statinį. **352.** Ne. Nurodymas. Reikia remtis 160 uždaviniu. **353.** Du, vieną arba nė vieno. Nurodymas. Reikia remtis 160 uždaviniu. **354.** Uždavinys turi vieną sprendinį, jei duotieji taškai nėra vienoje tiesėje; neturi sprendinio, jei tie taškai yra vienoje tiesėje. Nurodymas. Reikia remtis 160 uždaviniu. **355.** Nurodymas. Iš pradžių reikia nubrėžti tokį tašką A_1, kad tiesė a eitų per atkarpos AA_1 vidurį ir būtų jai statmena, po to nubrėžti atkarpą A_1B. **357.** Keturis, tris, du, vieną arba nė vieno. Nurodymas. Reikia remtis 311 uždaviniu. **358.** Keturis. Nurodymas. Reikia remtis 311 uždaviniu. **359.** Nurodymas. Iš pradžių reikia nubraižyti trikampį OAD, kurio $AD = R$ ir $OD = 2R$; čia R — duoto apskritimo spindulys. **360.** Nurodymas. Sakykime, duotas kampas A, ieškomojo trikampio ABC aukštinė BH ir atkarpa PQ, lygi jo perimetrui. Iš pradžių nubraižykite $\triangle ABH$, po to spindulio AH tašką D; $AD + AB = PQ$. **361.** Nurodymas. Iš pradžių reikia nubraižyti trikampį, kurio kraštinė lygi duotajam perimetrui, o prie jos esantys kampai lygūs duotų kampų pusėms. **362.** Nurodymas.

Sakykime, BC, $AC+AB$, $\angle B-\angle C$ ieškomojo trikampio ABC duoti elementai. Kraštinės CA tęsinyje už taško A atidėkime atkarpą AA_1, lygią atkarpai AB. Po to braižome trikampį CBA_1.

V skyrius

364. a) 540°; b) 720°; c) 1440°. **365.** a) Keturias; b) tris; c) šešias; d) penkias. **366.** 23 mm, 20 mm, 19 mm, 18 mm. **367.** 15 cm, 7 cm, 23 cm, 21 cm. **368.** 90°. **369.** 75°. **370.** 30°, 60°, 120°, 150°. **372.** a) 10,5 cm, 13,5 cm; b) 8,5 cm, 15,5 cm; c) 8 cm, 16 cm. **373.** 13 cm, 12 cm, 13 cm, 12 cm. **374.** 78 cm. **375.** 56 cm arba 70 cm. **376.** a) $\angle B=\angle D=96°$, $\angle C=84°$; b) $\angle A=\angle C=117°30'$, $\angle B=\angle D==62°30'$; c) $\angle A=\angle C=71°$, $\angle B=\angle D=109°$; d) $\angle A=\angle C=120°$, $\angle B==\angle D=60°$; e) $\angle A=\angle C=53°$, $\angle B=\angle D=127°$. **377.** $MN=PQ=6$ cm, $NP==QM=8$ cm, $\angle M=\angle P=60°$, $\angle N=\angle Q=120°$. **379.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $BK=DM$. **380.** Nurodymas. Reikia remtis 43 skyrelio 2° požymiu. **382.** Nurodymas. Reikia remtis 43 skyrelio 3° požymiu. **383.** Nurodymas. Reikia remtis 43 skyrelio 2° požymiu. **386.** Nurodymas. Per šoninės kraštinės vidurį reikia nubrėžti pagrindams lygiagrečią tiesę ir remtis 385 uždaviniu. **387.** $\angle B=144°$, $\angle D=63°$. **388.** Nurodymas. a) Per vieną mažesniojo pagrindo galų reikia nubrėžti šoninei kraštinei lygiagrečią tiesę. **389.** Nurodymas. a) Reikia pasinaudoti 388a uždavinio nurodymu; b) per vieną mažesniojo pagrindo galų reikia nubrėžti įstrižainei lygiagrečią tiesę. **390.** 68°, 112°, 112°. Nurodymas. Reikia remtis 388a uždaviniu. **391.** Nurodymas. Plyteles vieną prie kitos reikia dėti taip, kad šoninės kraštinės sutaptų, vienos plytelės mažesnysis pagrindas ir kitos plytelės didesnysis pagrindas būtų vienoje tiesėje. **392.** a) 6 cm; b) 5 cm. **394.** Tris. **395.** Nurodymas. Reikia remtis 284 uždaviniu. **401.** a) 198,1 cm arba 122,6 cm; b) 23,4 dm arba 19,8 dm. **403.** 18 cm. **404.** Nurodymas. Sakykime, BM — stačiojo trikampio ABC pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę AC. Reikia išnagrinėti keturkampį $ABCD$; čia D — taškas, simetriškas taškui B taško M atžvilgiu. **405.** a) 60° ir 120°; b) 30° ir 60°. **406.** 42 cm. **407.** 22°30′ ir 67°30′. **410.** a) Ne; b) ne; c) taip. **412.** 24 cm. **417.** a) Dvi; b) be galo daug: kiekviena tiesė, statmena duotai tiesei, ir pati duota tiesė; c) vieną. **418.** A, B, C, D, E. **422.** a) Taip; b) ne; c) taip; d) taip. **423.** H, O. **425.** Kerta kraštinę CD; 9 cm ir 5 cm. **426.** 3 cm, 4 cm, 3 cm. **428.** Nurodymas. Reikia remtis 400 uždaviniu. **430.** Nurodymas. Reikia remtis iškilojo keturkampio kampų sumos teorema ir 429 uždaviniu. **431.** Nurodymas. Per tašką M reikia nubrėžti tiesę, lygiagrečią BK, ir remtis 385 uždaviniu. **432.** Nurodymas. Reikia remtis 385 uždaviniu. **433.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle BKD=\triangle BMD$. **435.** Nurodymas. Reikia remtis 384 uždaviniu. **436.** 36,8 cm. Nurodymas. Nubrėžkite įstrižainę BD. **437.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle ABH=\triangle AMH$. **438.** 8 cm. Nurodymas. Reikia remtis 389a uždaviniu. **439.** Nurodymas. Per mažesniojo pagrindo vidurį reikia nubrėžti tieses, lygiagrečias šoninėms kraštinėms, ir remtis 404 uždaviniu. **440.** Nurodymas. Sakykime, EF — atkarpa, jungianti kvadratų kraštinių, išeinančių iš trikampio ABC viršūnės A, galus. Reikia išnagrinėti tašką D, simetrišką taškui A kraštinės BC vidurio atžvilgiu, ir įrodyti, kad $\triangle ABD=\triangle EAF$. **441.** Nurodymas. Reikia remtis 420 už-

daviniu. 443. Be galo daug. 444. N u r o d y m a s. Sakykime, a ir b — viena kitai statmenos figūros simetrijos ašys, O — jų susikirtimo taškas. Iš pradžių reikia įrodyti: jei taškai M ir M_1 simetriški tiesės a atžvilgiu, o M_1 ir M_2 simetriški tiesės b atžvilgiu, tai M ir M_2 simetriški taško O atžvilgiu.

VI skyrius

447. N u r o d y m a s. Sakykime, O — atkarpų AM ir BC susikirtimo taškas. Pirma reikia įrodyti, kad trikampiai ABO ir MCO lygūs. **448.** N u r o d y m a s. Reikia nuleisti statmenį EF į tiesę BC ir įrodyti, kad trikampiai ABM ir EFM, DCN ir EFN lygūs. **449.** a) 1,44 cm²; b) $\frac{9}{16}$ dm²; c) 18 m². **450.** a) 4 cm; b) 1,5 dm; c) $2\sqrt{3}$ m. **451.** a) 2400 mm²; b) 0,24 dm². **452.** a) 27,2 cm²; b) $6\sqrt{2}$ cm²; c) 21,4 cm; d) 2,7 cm. **453.** a) Padidės du kartus; b) padidės keturis kartus; c) nepasikeis. **454.** a) 25 cm ir 10 cm; b) kiekviena kraštinė lygi 3 m. **455.** 2200. **456.** 360. **457.** 12 m. **458.** Kvadrato formos sklypo plotas 900 m² didesnis. **459.** a) 180 cm²; b) 4 cm; c) 18 cm; d) 9. **460.** 156 cm². **461.** 84 cm². **462.** 18 cm². **463.** 56,7 cm². **464.** a) 10 cm; b) 4 cm; c) 12 cm ir 9 cm. **465.** 12 cm². **466.** 115,52 cm². **467.** Kvadrato plotas didesnis. **468.** a) 38,5 cm²; b) $5\sqrt{3}$ cm²; c) 5,4 cm; d) $4\sqrt{2}$ cm. **469.** 8 cm. **470.** 5,625 cm. **471.** a) 22 cm²; b) 1,8 dm². **472.** 14 cm ir 24 cm. **473.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 37 skyrelio teorema. **474.** Trikampių plotai lygūs. **475.** N u r o d y m a s. Iš pradžių kraštinę BC reikia padalyti į tris lygias dalis. **476.** a) 224 cm²; b) 4,6 dm². N u r o d y m a s. Reikia atsižvelgti į tai, kad rombo įstrižainės viena kitai statmenos. **477.** 6 cm ir 9 cm. **479.** a) 2 cm²; b) 2,4 cm. N u r o d y m a s. Reikia remtis 52 skyrelio antra teorema. **480.** a) 133 cm²; b) 24 cm²; c) 72 cm². **481.** 54 cm². **482.** 4,76 cm². **483.** a) 10; b) $\sqrt{61}$; c) $\frac{5}{7}$; d) 16. **484.** a) 5; b) $4\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{3}$; d) 2; e) 2. **485.** $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. **486.** a) 12; b) 2; c) 8. **487.** 15 cm. **488.** a) $3\sqrt{3}$ cm; b) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. **489.** a) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm²; b) $0{,}36\sqrt{3}$ cm²; c) $2\sqrt{3}$ dm². **490.** a) 10 cm ir 48 cm²; b) $6\sqrt{3}$ cm ir $27\sqrt{3}$ cm²; c) $7\sqrt{2}$ cm ir 49 cm². **491.** a) $4\frac{8}{13}$; b) 9,6. **492.** 8 cm, 9,6 cm, 9,6 cm. **493.** 13 cm ir 120 cm². **494.** 96 cm² ir 16 cm. **495.** a) 180 cm²; b) $48\sqrt{3}$ cm²; c) 135 cm². **496.** $\sqrt{7}$. **497.** 5 cm. **498.** a) Taip; b) ne; c) taip; d) taip; e) ne; f) ne; g) taip. **499.** a) 6,72 cm; b) $7\frac{1}{17}$ cm. **501.** a) 270 000 m²; b) 0,27 km². **502.** $46\frac{2}{3}$ cm². **503.** 20 cm. **504.** 900 cm². **505.** N u r o d y m a s. Reikia remtis tuo, kad statmuo mažesnis už pasvirąją. **506.** N u r o d y m a s. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse BC ir DC reikia pažymėti taškus M ir N, kad $BM=\frac{2}{3}BC$, $DN=\frac{2}{3}DC$, nubrėžti tieses AM ir AN. **507.** Ne. N u r o d y m a s. Pavyzdžiui, reikia palyginti trikampių, kurių kraštinės 13, 13, 24 ir 12, 12, 12, plotus. **508.** N u r o d y m a s. Reikia pagrindo

tašką sujungti su prieš pagrindą esančia viršūne ir remtis tuo, kad dviejų gautų trikampių plotų suma lygi turimo trikampio plotui. **509.** N u r o d y m a s. Uždavinys sprendžiamas panašiai kaip 508 uždavinys. **510.** N u r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad kiekvieno trikampio plotas lygus pusei lygiagretainio $AEDF$ ploto. **511.** a) ir b) Trikampių plotai lygūs. c) N u r o d y m a s. Reikia remtis uždaviniu b) ir 52 skyrelio antra teorema. **512.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **513.** 60 m, 14,4 m. **514.** $10\frac{10}{17}$ cm. **515.** a) $100\sqrt{3}$ cm^2; b) 18 cm^2. **516.** 320 cm^2. **517.** 84 cm^2. N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad trikampiai ABC ir ACD statieji. **518.** a) 243 cm^2; b) 529 cm^2. **519.** h^2. **520.** a^2. **522.** 48 cm^2. **523.** $(\sqrt{2}-1)a^2$. **524.** a) 96,814 m^2; b) 96,81 m^2; c) 96,8 m^2. **525.** 2,61. **526.** 5,53 dm^2. **527.** a) 3,34 cm; b) 3,3 cm. **528.** 3,40 m. **529.** a) Taip, $S=(4\pm1)$ cm^2; b) taip, $S=(8\pm1)$ cm^2; c) ne, nes 39,05 cm$^2 \leqslant S \leqslant 41{,}61$ cm^2. **530.** 8,13 cm. **531.** a) 106 cm; b) 105,6 cm. **532.** a) Ne, nes 5,80 cm $\leqslant c \leqslant 6{,}08$ cm; b) taip, $c=(5{,}9\pm0{,}2)$ cm.

VII skyrius

533. $\frac{3}{4}$; ne. **534.** a) Taip; b) taip; c) ne. **536.** a) 15 cm; b) $10\frac{2}{3}$. **537.** $BD=8$ cm, $DC=12$ cm. **538.** $AB=18$ cm, $AC=6$ cm. **539.** $NE=3{,}5$ cm, $EK=2{,}5$ cm. **540.** $CD=14$ cm, $DE=21$ cm. **541.** Taip. **542.** 8,4 cm, 10,5 cm, 14,7 cm. **544.** 4,5 cm. **545.** 175 cm^2 ir 252 cm^2. **546.** 87,5 km^2. **548.** 2,5. **549.** 6 cm, 8 cm, 12 cm. **550.** $x=9$, $y=21$. **551.** a) $EF=5$ cm, $FC=3{,}5$ cm; b) $DE=5\frac{5}{7}$ cm, $EC=2\frac{2}{7}$ cm. **552.** a) 10 cm; b) $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}=\frac{a}{b}$; c) 12 cm. **553.** a) Ne visada; b) taip; c) taip. **554.** 6 cm ir 6,5 cm. **555.** a) 5 cm, 5 cm, 7,5 cm, 7,5 cm; b) visos keturios kraštinės lygios $\frac{ab}{a+b}$. **557.** a) 17,5 cm; b) $BD=5$ cm, $DE=6$ cm; c) 8 cm. **558.** N u r o d y m a s. Jei tiesės a ir b nelygiagrečios, tai per tašką A reikia nubrėžti tiesę, lygiagrečią tiesei b. **559.** Taip. **560.** a) Taip; b) taip. **562.** $\frac{ah}{a+h}$. N u r o d y m a s. Reikia remtis 543 uždaviniu. **563.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$. N u r o d y m a s. Per tašką D reikia nubrėžti tiesę, lygiagrečią BK. **564.** 10 cm. **565.** 5 cm. **566.** 42 cm. **567.** N u r o d y m a s. Reikia nubrėžti turimo keturkampio įstrižainę. **568.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 567 uždaviniu. **569.** N u r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad trapecijos šoninės kraštinės vidurys yra tiesėje, einančioje per įstrižainių vidurio taškus. **570.** 6 cm ir 12 cm. **571.** $3S$. **572.** a) $h=20$, $a=4\sqrt{41}$, $b=5\sqrt{41}$; b) $h=48$, $a=80$, $b=60$; c) $a=12\sqrt{3}$, $c=24$, $a_c=18$; d) $b=8\sqrt{3}$, $c=16$, $b_c=12$; e) $h=2\sqrt{5}$, $b=3\sqrt{5}$, $a_c=4$, $b_c=5$. **573.** $a_c=\frac{a^2}{c}$, $b_c=\frac{b^2}{c}$. **574.** N u r o d y m a s. a) Reikia pritaikyti trikampio ploto formulę. b) Rei-

kia remtis 573 uždaviniu. 575. 32 mm, 18 mm. **576.** 61 cm. **577** $1\frac{12}{13}$ cm, $11\frac{1}{13}$ cm. **579.** 3,15 m. **580.** 6,936 m. **581.** 6,12 m. **582.** 48 m. **583.** 72,25 m. **586.** Nurodymas. Iš pradžių reikia nubraižyti trikampį, panašų į ieškomąjį. **587.** Nurodymas. Žr. 586 uždavinio nurodymą. **588.** Nurodymas. Žr. 586 uždavinio nurodymą. **589.** Nurodymas. Žr. 586 uždavinio nurodymą. **590.** Nurodymas. Žr. 586 uždavinio nurodymą. **593.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $\sqrt{3}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ir $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$ ir $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ir $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **594.** a) $\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$, $90°-\beta$, $\frac{b}{\sin\beta}$; b) $\approx 8{,}39$ cm, 40°, $\approx 13{,}05$ cm. **595.** a) $b\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $90°-\alpha$, $\frac{b}{\cos\alpha}$; b) ≈ 11 cm, 48°, ≈ 16 cm. **596.** $90°-\alpha$, $c\sin\alpha$, $c\cos\alpha$; 55°, ≈ 14 cm, ≈ 20 cm. **597.** $\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$; ≈ 19 cm, $\approx 38°39'$, $\approx 51°21'$. **598.** a) $b^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; b) $\frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha$. **599.** $8\operatorname{tg}\alpha$ cm². **600.** ≈ 74 m. **601.** 60°, 120°, 60° ir 120°. **602.** 60° ir 30°. **603.** ≈ 72 cm². **604.** $A_1B_1=4{,}5$ cm, $B_1C_1=6{,}75$ cm. **606.** $\frac{7}{8}$. **607.** 18 cm, 12 cm. **608.** Nurodymas. Reikia remtis 535 uždaviniu. **609.** Nurodymas. Reikia remtis 535 uždaviniu. **610.** 16,8 cm, 14 cm, $7\frac{7}{9}$ cm. **612.** $x=\frac{ab}{a+b}$. **613.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad: a) $\triangle ABM\sim\triangle A_1B_1M_1$; b) $\triangle ABH\sim\triangle A_1B_1H_1$. **614.** $DC=2\frac{2}{3}$ cm, $DB=2\sqrt{13}$ cm, $CB=\frac{2}{3}\sqrt{61}$ cm. Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle ADC\sim\triangle BAD$. **615.** $\frac{2ab}{a+b}$. **619.** Nurodymas. Sakykime, taškas B yra tarp C ir D. Trikampiams ABD ir ACD du kartus reikia taikyti 52 skyrelio pirmos teoremos 2 išvadą. **620.** Nurodymas. Reikia remtis 535 uždaviniu. **621.** $\frac{ab}{2}\sin\alpha$. **625.** Nurodymas. Reikia remtis 62 skyrelio 1 uždaviniu. **626.** a) $h=6{,}20$ cm, $a=8{,}11$ cm, $b=9{,}62$ cm; b) $h=1{,}67$ cm, $a=2{,}05$ cm, $b=2{,}86$ cm; c) $h=11{,}53$ cm, $a=13{,}70$ cm, $b=21{,}32$ cm. **627.** a) $b=2{,}76$ m, $c=4{,}28$ m; b) $b=11{,}06$ m, $c=14{,}09$ m; c) $b=1{,}37$ m, $c=3{,}37$ m. **628.** 1,32. **629.** $a=25{,}1$ cm, $b=10{,}9$ cm, $c=27{,}3$ cm. **630.** $\frac{a}{b}=1{,}08$; $\frac{a}{c}=0{,}74$.

VIII skyrius

633. OA ir AC. **635.** 30°. **636.** 120°. **637.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\angle ADC=30°$. **638.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm. **639.** $12\sqrt{3}$ cm. **640.** 60°. **641.** 60°. **642.** $3\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm; 30°, 30°. **643.** 5 cm. **647.** a) Taip; b) ne; c) taip. **648.** a) Nurodymas. Iš pradžių reikia nubrėžti tiesę, einančią per apskritimo centrą ir statmeną duotai tiesei. **650.** a) 16; b) $16\sqrt{2}$; c) 32. **651.** 112°

ir 248°. **652.** $15\sqrt{3}$ cm. **654.** a) 64°; b) 175°; c) 34°; d) 105°. **655.** 60° ir 30° arba 140° ir 110°. **656.** $\approx 101°$ arba $\approx 36°$. **657.** 50°. **658.** 20°20′, 34°50′. **660.** 36°. **661.** 44°. **662.** 62°. **664.** Nurodymas. Reikia remtis 663 uždaviniu. **666.** a) 4; b) 12; c) 0,25. **667.** $8\sqrt{2}$ cm. **670.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle ABP \sim \triangle AQB$. **671.** a) 6 cm; b) 7,5 cm. **672.** Nurodymas. Reikia remtis 670 uždaviniu. **674.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad trikampis AOB lygiašonis. **676.** a) 10 cm; b) $7\sqrt{2}$ dm. **678.** a) 46° ir 46°; b) 21° ir 21°. **679.** a) $AD=3{,}5$ cm, $CD=5$ cm; b) $AC=14{,}6$ cm. **681.** 9 cm. **683.** Nurodymas. Reikia taikyti prieštaros metodą. **687.** Nurodymas. Reikia remtis 72 skyrelio antra teorema. **688.** Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad ieškomasis taškas yra duoto kampo pusiaukampinėje. **689.** $3\frac{1}{3}$ cm. **690.** 50 cm. **691.** 20 cm. **692.** $AP=1{,}5$ cm, $PB=8{,}5$ cm, $BQ=8{,}5$ cm, $QC=3{,}5$ cm, $CR=3{,}5$ cm, $RA=1{,}5$ cm. **693.** a) 60 cm; b) 40 cm. **694.** $m-c$. **695.** 30 cm. **698.** 60 cm^2. **699.** 1,2 cm. **702.** a) $\angle A=67°$, $\angle B=23°$, $\angle C=90°$; b) $\angle A=55°$, $\angle B=35°$, $\angle C=90°$. **703.** $\angle A=51°$, $\angle B=\angle C=64°30'$. **704.** b) d, $d\sin\alpha$, $d\cos\alpha$. **705.** a) 5 cm; b) 18 cm. Nurodymas. Reikia remtis 704 uždaviniu. **706.** $10\sqrt{3}$ cm. **707.** 16 cm. **709.** Nurodymas. Reikia remtis įbrėžtinio keturkampio kampų savybe. **710.** Nurodymas. Reikia remtis 389a uždaviniu. **712.** Nurodymas. Reikia remtis 664 uždaviniu. **713.** Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad $BM=MX$ ir $CN=NX$. **714.** Nurodymas. Sakykime, K — bendros liestinės, einančios per tašką M, ir tiesės AB susikirtimo taškas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $KA=KM=KB$. **720.** Ne. **722.** $\frac{2S}{5r}$, $\frac{S}{3r}$, $\frac{3S}{5r}$, $\frac{2S}{3r}$. **725.** $\frac{ab}{a+b}$. **726.** Nurodymas. Reikia pasinaudoti kraštinės, į kurią nubrėžta pusiaukraštinė, vidurio statmeniu. **728.** Nurodymas. Reikia remtis įbrėžtinio keturkampio kampų savybe. **730.** Nurodymas. Reikia remtis 729 uždaviniu. **731.** Nurodymas. Reikia remtis 729 uždaviniu. **732.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad apie keturkampį $MHBC$ galima apibrėžti apskritimą. **733.** 5 cm. **734.** Nurodymas. Reikia remtis 709 ir 721 uždaviniu. **735.** $\frac{\sqrt{ab}}{2}$. **736.** Nurodymas. Reikia pasinaudoti atkarpos AB vidurio statmeniu. **737.** Nurodymas. Reikia remtis 281 uždaviniu.

IX skyrius

742. Atveju b). **744.** Greitis, jėga. **745.** $|\vec{AB}|=3$ cm, $|\vec{BC}|=4$ cm, $|\vec{DC}|=3$ cm, $|\vec{MC}|=\sqrt{18{,}25}$ cm, $|\vec{MA}|=1{,}5$ cm, $|\vec{CB}|=4$ cm, $|\vec{AC}|=5$ cm. **746.** $|\vec{BD}|=13$ cm, $|\vec{CD}|=5\sqrt{2}$ cm, $|\vec{AC}|=\sqrt{74}$ cm. **748.** a) Taip; b) ne; c) taip; d) ne. **749.** a) Ne; b) taip; c) ne; d) ne; e) taip. **751.** a) Rombas; b) trapecija. **752.** a) Taip; b) taip; c) ne; d) ne; e) taip. **753.** Taip. **760.** Nurodymas. Reikia remtis trikampio nelygybe. **762.** a) a; b) $a\sqrt{3}$; c) $a\sqrt{3}$; d) a; e) a. **763.** a) -2 ir 10; b) 14 ir 10; c) 14 ir 10; d) -2 ir 10. **764.** a) $\vec{AK}$; b) $\vec{AM}$. **766.** $\vec{XY}=-\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}+\vec{d}$. **767.** c) $-\vec{b}$. **768.** $\vec{BM}=-\vec{a}$, $\vec{NC}=\vec{b}$,

$\vec{MN}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{BN}=(\vec{b}-\vec{a})-\vec{a}$. **769.** $\vec{B_1C}=\vec{x}$, $\vec{BB_1}=\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{BA}=-\vec{y}$, $\vec{BC}=\vec{x}-\vec{y}+\vec{x}$. **770.** a) $\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; b) $\vec{AC}=-\vec{a}-\vec{b}$; c) $\vec{AC}=\vec{a}-\vec{b}$. **771.** $\vec{DC}+\vec{CB}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{BO}+\vec{OC}=\vec{b}$, $\vec{BO}-\vec{OC}=-\vec{a}$, $\vec{BA}-\vec{DA}=-\vec{a}+\vec{b}$. **773.** Lygybė $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$ teisinga, kai $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$ arba bent vienas vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ nulinis. **774.** 60°. **781.** a) $4\vec{n}$; b) $\frac{5}{2}\vec{m}+\frac{3}{2}\vec{n}$; c) $-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}$. **782.** $\vec{EC}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{AG}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **783.** $\vec{AM}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{MD}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$. **784.** a) $\vec{AC}=\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{AO}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\vec{CO}=-\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\vec{DO}=\frac{1}{2}(\vec{y}-\vec{x})$, $\vec{AD}+\vec{BC}=2\vec{x}$, $\vec{AD}+\vec{CO}=\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})$, $\vec{CO}+\vec{OA}=-\vec{x}-\vec{y}$; b) $\vec{AM}=\frac{1}{3}\vec{x}$, $\vec{MC}=\frac{2}{3}\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{BM}=\frac{1}{3}\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{OM}=-\frac{1}{6}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}$. **786.** $\vec{AA_1}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{BB_1}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{CC_1}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. **787.** $-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **790.** Nurodymas. Reikia remtis 785 uždaviniu. **793.** 10 cm. **794.** 6,8 cm ir 10,2 cm. **795.** 30 cm. **796.** 16 cm. **798.** 60°, 60°, 120°, 120°. **799.** 7 cm. **801.** Nurodymas. Kai vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ nekolinearūs, reikia remtis vektorių sudėties trikampio taisykle; kai jie kolinearūs — 800 uždaviniu. **802.** $-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. **803.** $\vec{XY}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$, $\vec{MP}=-\vec{a}+\vec{b}$. **804.** $\vec{CK}=\vec{a}$, $\vec{KD}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **809.** $\frac{3}{4}\vec{a}$. **810.** Nurodymas. Reikia remtis 72 skyrelio pirma teorema.

Sunkesni uždaviniai

811. Nurodymas. Pratęskite kas antrą duoto šešiakampio kraštinę tiek, kad gautute lygiakraštį trikampį. **812.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $a_1+a_2+a_3=a_3+a_4+a_5=a_5+a_6+a_1$. Po to reikia nubraižyti lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė lygi $a_1+a_2+a_3$, ir remtis 811 uždaviniu. **814.** Nurodymas. Sakykime, $ABCD$ — iškilasis keturkampis. Reikia atsižvelgti į tai, kad viršūnė C yra kampo BAD viduje, todėl spindulys AC yra to kampo viduje, vadinasi, kerta atkarpą BD. Panašiai reikia išnagrinėti spindulį BD ir kampą ABC. **815.** Nurodymas. Jei duotasis keturkampis $ABCD$ — iškilasis, reikia remtis 814 uždaviniu. Jei $ABCD$ — neiškilasis keturkampis ir, pavyzdžiui, tiesė AB kraštinę CD kerta taške M, tai reikia išnagrinėti du atvejus: A — atkarpos MB taškas ir B — atkarpos AM taškas. **816.** $\frac{a}{4}$. Nurodymas. Sakykime, P — tiesių DE ir AB susikirtimo taškas, $DO \parallel AC$ ir $O \in AB$. Iš pradžių reikia įrodyti, kad APE, AOD ir POD — lygiašoniai trikampiai. **817.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti nelygybes $m_a < \frac{b+c}{2}$ ir $m_a > \frac{b+c-a}{2}$; čia a, b, c — trikampio kraštinės, m_a — į kraštinę a nubrėžta pusiaukraštinė. **818.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad duoto keturkampio įstrižainių susikirtimo taškas jas dalija pusiau. **819.** Duotai

tiesei lygiagreti tiesė. **820.** Nurodymas. Reikia remtis 388 a ir 389 a uždaviniu. **821.** Nurodymas. Reikia remtis 428 uždaviniu. **822.** Nurodymas. Sakykime, O_1, O_2, O_3, O_4 — kvadratų, kurių kraštinės yra duoto lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB, BC, CD, DA, įstrižainių susikirtimo taškai. Iš pradžių reikia įrodyti, kad trikampiai AO_1O_4, BO_1O_2, CO_2O_3, DO_3O_4 lygūs. **823.** Nurodymas. Spindulyje AB reikia atidėti atkarpą AN, lygią atkarpai AM, nubrėžti atkarpą MN ir nuleisti trikampio AMN aukštinę NS. Po to įrodyti, kad $\triangle ANS = \triangle MAD$ ir $\triangle AKB = \triangle NMS$. **824.** 90°. Nurodymas. Sakykime, D_1 — taškas, simetriškas taškui D taško E atžvilgiu. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle ACD_1$ — statusis lygiašonis trikampis. **825.** 30°. Nurodymas. Spindulyje AM reikia atidėti atkarpą $AK = AB$, ir, išnagrinėjus trikampį BKC, įrodyti, kad taškas K sutampa su tašku M. **826.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle BKP = \triangle ABC = \triangle CQT$. **827.** Nurodymas. Iš pradžių reikia nubraižyti lygiašonį trikampį, kurio pagrindas lygus trapecijos pagrindų sumai, o šoninė kraštinė lygi trapecijos įstrižainei. **828.** a) Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad simetrijos ašis kerta vieną trikampio kraštinę. **829.** Nurodymas. Reikia pasinaudoti trikampių ABC ir ADC, APM ir ATM, MQC ir MRC lygumu. Norint įrodyti atvirkštinį teiginį, reikia tarti, kad taškas M nėra įstrižainėje AC ir įrodyti, kad tada lygiagretainių plotai nelygūs. **830.** $\dfrac{S_1S_3\cdot(S_1+S_2)\cdot(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$. Nurodymas. Reikia remtis 52 skyrelio 2 išvada. **831.** $(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2})^3$. Nurodymas. Reikia remtis 52 skyrelio antra teorema. **832.** $\frac{1}{5}$. **833.** Nurodymas. Sakykime, AB — trapecijos $ABCD$ šoninė kraštinė, M — kitos šoninės kraštinės vidurys. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. **834.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $S_{AOB} = S_{COD} = \sqrt{S_1\cdot S_2}$. **835.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad lygiagretainio, kurio kraštinė yra mažesnysis trapecijos pagrindas, plotas lygus dviejų trikampių, esančių prie to pagrindo ir trapecijos šoninių kraštinių, plotų sumai. **836.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $S_{AKM} = S_{CKM}$ ir $S_{BKM} = S_{DMK}$. **837.** Nurodymas. Reikia nubrėžti kiekvieno iš trijų gautų keturkampių tas įstrižaines, kurių jokios dvi neturėtų bendro galo, ir įrodyti, kad kiekvieno iš dviejų vidurinių trikampių plotas lygus atitinkamų kraštinių trikampių plotų sumos pusei. **839.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $S_{AMB} = S_{ADK} + S_{KCB}$. **840.** $2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$. Nurodymas. Sakykime, AB ir AD — statmenys, nuleisti į tieses, kuriose yra duoto kampo O kraštinės, C — tiesių AB ir OD susikirtimo taškas. Reikia išnagrinėti stačiuosius trikampius ADC ir OBC. **841.** $2\sqrt{S_1S_2}$. Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad trikampiai BKC ir MCD turi po lygų kampą, ir remtis 52 skyrelio antra teorema. **842.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad trikampių BTC ir ETC plotai lygūs. **843.** $\frac{a}{2}$. Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad trikampių DCK ir DCM plotai lygūs, po to įrodyti, kad $KM \parallel DC$. **844.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. Nurody-

m a s. Per tašką M reikia nubrėžti tieses, lygiagrečias stačiakampio kraštinėms, ir išnagrinėti gautus stačiuosius trikampius. **845.** N u r o d y m a s. Sakykime, $AB=c$, $BC=a$, $BD=h$. Taikant Pitagoro teoremą reikia įrodyti, kad $MB=\sqrt{a^2+c^2-h^2}$ ir $KB=\sqrt{a^2+c^2-h^2}$. **846.** N u r o d y m a s. Reikia nuleisti statmenis OM ir ON į kraštines AC ir CB, įrodyti, kad $OM=\frac{1}{3}CB$, $ON=\frac{1}{3}AC$. Po to trikampiams AOM, BON ir COM reikia taikyti Pitagoro teoremą. **847.** b) N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $DF=DE$ ir $AF=FE$, po to pasinaudoti trikampių AED ir AFE panašumu. **848.** N u r o d y m a s. Sakykime, AK — trikampio ABC pusiaukampinė ir, pavyzdžiui, $AC>AB$. Remiantis 535 uždaviniu iš pradžių reikia įrodyti, kad taškas M yra tarp taškų K ir C, po to remtis 556 uždaviniu. **849.** N u r o d y m a s. Reikia remtis teiginiu: atkarpa, jungianti smailiojo trikampio dviejų aukštinių pagrindus, nuo jo nukerta į turimą trikampį panašų trikampį. **850.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle MBC \sim \triangle MFK$ ir $\triangle MAC \sim \triangle MEK$; čia M — tiesių CK ir AB susikirtimo taškas. **851.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. N u r o d y m a s. Sakykime, ABC — duotas trikampis, D — kvadrato, kurio kraštinė yra įžambinė BC, įstrižainių susikirtimo taškas. Spindulio CA tęsinyje reikia pažymėti tašką E, kad $\angle CDE=\angle ADB$; iš pradžių įrodyti, kad $\triangle ABC \sim \triangle ECD$. **852.** N u r o d y m a s. Sakykime, BD ir CE — trikampio ABC pusiaukampinės. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\angle C=2\angle B$, $\angle B=2\angle A$, po to įrodyti, kad $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ ir $\triangle ABC \sim \triangle ACE$. **853.** N u r o d y m a s. Sakykime, tiesės MP ir MQ kerta tieses OB ir OA taškuose E ir F. Norint įrodyti, kad trikampiai OEF ir ORS panašūs, reikia pasinaudoti trikampių OPR ir OFQ, OQS ir OEP panašumu. **854.** N u r o d y m a s. Reikia pasinaudoti tuo, kad AH — trikampio, panašaus į trikampį BDH, pusiaukraštinė. **855.** N u r o d y m a s. a) Nagrinėjant panašiuosius trikampius iš pradžių reikia įrodyti, kad $AD^2=AC\cdot AE$, $DB^2=BC\cdot BF$ ir $CD^2=AD\cdot DB$. b) Trikampiams AED ir DFB reikia taikyti Pitagoro teoremą. c) Reikia pasinaudoti trikampių AED ir ACB panašumu. **856.** a) $\angle A=75°$, $\angle B=135°$, $\angle C=60°$, $\angle D=90°$. b) N u r o d y m a s. Reikia atsižvelgti į tai, kad trikampiai ABP ir DAB panašūs. **857.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 567 uždaviniu. **858.** N u r o d y m a s. Sakykime, MN — atkarpa, jungianti duoto keturkampio $ABCD$ kraštinių AD ir BC vidurius. Reikia pažymėti tašką D_1, simetrišką taškui D taško N atžvilgiu, ir išnagrinėti $\triangle ABD_1$. **859.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 858 uždaviniu. **860.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 858 uždaviniu. **861.** N u r o d y m a s. Reikia remtis trikampio vidurinės linijos teorema bei 404 ir 820 uždaviniais. **862.** N u r o d y m a s. Reikia pratęsti statmenis AM ir AK, kol jie kirs tiesę BC; tuos taškus pažymėti raidėmis D ir E ir iš pradžių įrodyti, kad MK — trikampio DAE vidurinė linija. **863.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 435 uždaviniu. **864.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 863 uždaviniu. **865.** N u r o d y m a s. Sakykime, taškas N — atkarpos AC vidurys. Iš pradžių reikia įrodyti, kad trikampiai MBC ir MNC lygūs, o BN — trikampio AKC vidurinė linija, po to remtis 52 skyrelio 2 išvada. **866.** N u r o d y m a s. Per vienos trikampio ABC pusiaukraštinės galus reikia nubrėžti tieses, lygiagrečias kitoms dviem pusiaukraštinėms, ir pasinaudoti tuo, kad

gautasis trikampis lygus trikampiui EFG. **867.** $\frac{1}{5}$. **868.** N u r o d y m a s. Reikia pasinaudoti trikampių MND ir MAB, MAD ir MPB panašumu. **869.** N u r o d y m a s. Sakykime, $ABCD$ — lygiašonė trapecija, X — ieškomasis didesniojo pagrindo AD taškas, AB — duota šoninė kraštinė. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\frac{AX}{XD}=n$ ir remtis 584 uždaviniu. **870.** S p r e n d i m a s. Bet kokiame spindulyje, kurio pradžia — taškas A, atidedame atkarpą AC_1, lygią atkarpai AC, o spindulyje C_1A nuo taško C_1 — atkarpą C_1B_1, lygią atkarpai CB (nupieškite paveikslą). Įsitikinkite, kad tiesė, einanti per tašką C_1 ir lygiagreti tiesei BB_1, tiesę AB kerta ieškomame taške D. Uždavinys neturi sprendinio, kai C — atkarpos AB vidurys. **871.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubraižyti lygiašonį trikampį, kurio kampas lygus duotam kampui. **872.** N u r o d y m a s. Sakykime, ABC — ieškomasis trikampis, kurio kraštinės AB, AC ir pusiaukampinė AD duotos. Tiesėje AD pažymėkime tašką E, kad $BE \parallel AC$. Pasinaudojant trikampių ADC ir EDB panašumu bei 535 uždaviniu iš pradžių reikia nubraižyti atkarpą DE, po to trikampį ABE, kai žinomos visos trys kraštinės. **873.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubraižyti trikampį, panašų į ieškomąjį trikampį ABC. **874.** N u r o d y m a s. Sakykime, h_a, h_b ir h_c — duotos aukštinės. Reikia pasinaudoti tuo, kad ieškomo trikampio kraštinės a, b ir c proporcingos atkarpoms h_b, h_a ir $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$. **875.** N u r o d y m a s. Sakykime, $ABCD$ — ieškomoji trapecija, kurios $\angle A$, šoninė kraštinė AB ir didesnysis pagrindas AD žinomi. Iš pradžių reikia nubraižyti $\triangle ABD$, po to $\triangle BCD$, kai žinomas kampas B, kraštinė BD ir kitų dviejų kraštinių santykis. **876.** N u r o d y m a s. Iš pradžių ieškomo rombo įstrižaines reikia išreikšti duoto kvadrato kraštine ir duotomis atkarpomis. **877.** N u r o d y m a s. Reikia pasinaudoti duotų apskritimų bendra liestine. **878.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\triangle ABC \sim \triangle BAD$. **879.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 718 uždaviniu. **880.** N u r o d y m a s. Reikia išnagrinėti du atvejus: tiesių susikirtimo taškas yra skritulio viduje ir skritulio išorėje. Pirmuoju atveju teks remtis susikertančių stygų atkarpų sandaugos teorema. **881.** N u r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad tas santykis lygus duoto apskritimo skersmeniui. **882.** N u r o d y m a s. Iš taškų O_1 ir O_2 reikia nuleisti statmenis O_1H_1 ir O_2H_2 į tiesę BC ir atstumą tarp lygiagrečių tiesių O_1H_1 ir O_2H_2 palyginti su atkarpos O_1O_2 ilgiu. **883.** Sakykime, CD — skersmuo, statmenas duoto apskritimo skersmeniui AB. Ieškomoji taškų aibė yra du apskritimai, kurių skersmenys — atkarpos OC ir OD. **884.** 146° ir 107°. N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad M — apskritimo, kurio centras A ir spindulys AB, taškas. **885.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad nubrėžtosios tiesės, sudarančios naują trikampį, yra trikampio priekampių pusiaukampinės, po to taikyti kampo pusiaukampinės teoremą (72 skyrelis). **886.** N u r o d y m a s. Norėdami įrodyti, kad taškas A' yra apibrėžtinio apskritimo taškas, pirma įsitikinkite, kad $\angle A'CB = \angle BAA'$. **887.** N u r o d y m a s. Sakykime, E — spindulio BD ir apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo susikirtimo taškas. Reikia pasinaudoti trikampių ABE ir BCD panašumu. **888.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia įrodyti, kad OE — atkarpos AB vidurio statmuo. **889.** N u r o d y m a s. Sakykime, $XC > XA$ ir $XC > XB$. Atkarpoje XC reikia atidėti atkarpą XD, lygią atkarpai XA, atsižvelgti į

tai, kad $\angle AXC = 60°$, ir įrodyti, kad trikampiai AXB ir ADC lygūs. **890.** Nurodymas. Sakykime, $ABCD$ — duotas keturkampis. Reikia nubrėžti skersmenį BB_1 ir iš pradžių įrodyti, kad $AB_1 = CD$. **891.** Nurodymas. Per nurodytų pusiaukampinių susikirtimo tašką reikia nubrėžti tiesę, lygiagrečią AB; jei E ir F — tos tiesės bei tiesių AD ir BC susikirtimo taškai, tai reikia įrodyti, kad $EF = DC$. **892.** Nurodymas. Sakykime, $ABCD$ — duota trapecija, apibrėžta apie apskritimą, kurio spindulys r, o $AD = a$, $BC = b$ — jos pagrindai. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $r = \frac{ab}{a+b}$. **893.** Nurodymas. Keturkampio $ABCD$ įstrižainėje AC reikia pažymėti tašką K, kad $\angle ABK = \angle CBD$, po to pasinaudoti trikampių ABK ir DBC, BCK ir ABD panašumu. **894.** Nurodymas. Per įbrėžtinio apskritimo centrą M reikia nubrėžti apibrėžtinio apskritimo skersmenį PQ ir iš pradžių įrodyti, kad $PM \cdot MQ = 2Rr$. **895.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad taškai A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 yra apskritimo, kurio centras — atkarpos OH vidurys ir spindulys lygus $\frac{R}{2}$, taškai; čia R — apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys. **896.** Nurodymas. Sakykime, ABC — duotas trikampis, o H, K ir M — statmenų, nuleistų iš apskritimo taško D į tieses AB, AC ir BC, pagrindai. Tarkime, kad spindulys DK yra kampo HDM viduje. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $\angle AKH = \angle ADH = \angle MDC = \angle MKC$. **897.** Nurodymas. Sakykime, O_1 ir O_2 — duotų apskritimų centrai, r_1 ir r_2 — jų spinduliai, $r_1 > r_2$. Reikia nubrėžti du apskritimus, kurių centrai O_1 ir O_2, o spinduliai atitinkamai lygūs $r_1 - r_2$ ir $r_1 + r_2$, ir pasinaudoti 673 uždavinio sprendimu. **898.** Nurodymas. Iš pradžių reikia nubrėžti du apskritimus: vieno spindulys P_2Q_2, centras M, kito spindulys OA, centras O; čia A — kurios nors duoto apskritimo stygos, lygios atkarpai P_1Q_1, vidurys. Po to reikia remtis 897 uždaviniu. **899.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad mažiausia yra styga, statmena per duotą tašką einančiam skersmeniui. **900.** a) Nurodymas. Iš pradžių reikia nubraižyti kurį nors trikampį, kai žinoma kraštinė ir prieš ją esantis kampas, po to apie jį apibrėžti apskritimą ir pasiremti 71 skyrelio 1 išvada. b) Nurodymas. Sakykime, ABC — ieškomasis trikampis, $\angle B$ — duotas kampas. Spindulio AC tęsinyje atidedame atkarpą $AA_1 = AB$, o spindulio CA tęsinyje — atkarpą $CB_1 = BC$. Remiantis 900 uždaviniu, a, iš pradžių reikia nubraižyti $\triangle A_1BB_1$. **901.** Nurodymas. Sakykime, PQR — ieškomasis trikampis, P — viršūnė, iš kurios nubrėžtos trikampio aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, O — apie trikampį apibrėžto apskritimo centras. Reikia atsižvelgti į tai, kad $BO \perp QR$. **902.** Keturis sprendinius. Nurodymas. Reikia remtis 885 uždaviniu. **904.** Lygiagretainis. **905.** Lygiagretainis. Nurodymas. Reikia remtis 84 skyrelio 1 uždaviniu. **906.** Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad vektorių $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ ir $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ ilgiai lygūs. **907.** Nurodymas. Sakykime, taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje. Iš pradžių reikia įrodyti, kad tada $\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC}$, n — tam tikras skaičius. Skaičius k, l, m galima pasirinkti, pavyzdžiui, šitokius: $k = n - 1$, $l = 1$, $m = -n$. Įrodant atvirkštinį teiginį galima laikyti, kad taškas O sutampa su tašku A. **908.** Nurodymas. Saky-

kime, E ir F — keturkampio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD vidurio taškai, G — atkarpų, jungiančių priešingų kraštinių vidurio taškus, susikirtimo taškas. Remiantis 791 uždaviniu vektorius $\vec{OE}$, $\vec{OF}$ ir $\vec{OG}$ (O — bet kuris taškas) reikia išreikšti vektoriais $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ ir remtis 907 uždaviniu. **909.** Nurodymas. Reikia remtis 619 ir 907 uždaviniu. **910.** Nurodymas. Sakykime, A_1, B_1 ir C_1 — trikampio ABC kraštinių BC, CA ir AB vidurio taškai. Remiantis tuo, kad $\vec{GA}=-2\vec{GA_1}$, $\vec{GB}=-2\vec{GB_1}$ ir $\vec{GC}=-2\vec{GC_1}$, reikia įrodyti, kad $\vec{GH}=-2\vec{GO}$.

X skyrius

911. a) -4; b) 20; c) -1; d) 5. **912.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) 1; e) -1; f) $-\frac{1}{4}$; g) 3; h) $-\frac{4}{3}$; i), k) tokio skaičiaus k nėra. **913.** a) Taip; b) taip. **914.** Nurodymas. Reikia įrodyti prieštaros metodu ir remtis kolineariųjų vektorių lema. **915.** $\vec{AM}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$. **916.** a) $x=-1$, $y=3$; b) $x=4$, $y=-5$; c) $x=0$, $y=3$; d) $x=-1$, $y=\frac{1}{3}$. **918.** a) $\vec{a}\{2;\ 3\}$; b) $\vec{b}\{-2;\ 3\}$, $\vec{c}\{2;\ 0\}$; c) $\vec{d}\{-3;\ -4\}$, $\vec{e}\{2;\ -2\}$, $\vec{f}\{-4;\ -5\}$. **919.** a) $\vec{a}\{2;\ 3\}$, $\vec{b}\left\{-\frac{1}{2};\ -2\right\}$; $\vec{c}\{8;\ 0\}$, $\vec{d}\{1;\ -1\}$, $\vec{e}\{0;\ -2\}$, $\vec{f}\{-1;\ 0\}$. **920.** a) $\vec{x}=-3\vec{i}+\frac{1}{5}\vec{j}$; b) $\vec{y}=-2\vec{i}-3\vec{j}$; c) $\vec{z}=-\vec{i}$; d) $\vec{u}=3\vec{j}$; e) $\vec{v}=\vec{j}$. **921.** a) $x=5$, $y=-2$; b) $x=-3$, $y=7$; c) $x=-4$, $y=0$; d) $x=0$, $y=0$. **922.** a) $\{5;\ 7\}$; b) $\{4;\ 1\}$; c) $\{1;\ 1\}$; d) $\{-1;\ 0\}$. **923.** a) $\{3;\ 2\}$; b) $\{6;\ 0\}$; c) $\{-1;\ 9\}$; d) $\{-7;\ -2\}$. **924.** $2\vec{a}\{6;\ 4\}$, $3\vec{a}\{9;\ 6\}$, $-\vec{a}\{-3;\ -2\}$, $-3\vec{a}\{-9;\ -6\}$. **925.** $\{-2;\ -4\}$, $\{2;\ 0\}$, $\{0;\ 0\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{-2;\ 3\}$, $\{0;\ -5\}$. **926.** a) $\{21;\ -21\}$; b) $\{13;\ 24\}$; c) $\{-21;\ -14\}$; d) $\{8;\ -10\}$. **927.** Nurodymas. Reikia remtis kolineariųjų vektorių lema. **928.** $\vec{a}$ ir $\vec{c}$, $\vec{b}$ ir $\vec{d}$. **929.** a) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$; b) $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $O(0;\ 0)$. **930.** a) $O(0;\ 0)$, $A(6{,}5;\ 0)$, $C(6{,}5;\ 3)$, $B(0;\ 3)$; b) $O(0;\ 0)$, $A(a;\ 0)$, $C(a;\ b)$, $B(0;\ b)$. **931.** $M(3;\ -3)$, $N(3;\ 3)$, $Q(-3;\ -3)$ arba $M(3;\ -3)$, $N(-3;\ -3)$, $Q(3;\ 3)$. **932.** $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;\ h)$. **933.** $(7;\ -3)$. **934.** a) $\{-4;\ 0\}$; b) $\{0;\ 26\}$; c) $\{3;\ 4\}$; d) $\{-4;\ -3\}$. **935.** 1) $\vec{AB}\{1;\ 1\}$; 2) $x=-3$, $y=-4$; 3) $A(6;\ 1{,}5)$; 4) $B(a+c;\ b+d)$; 5) $B(1;\ 2)$. **936.** 1) $M\left(-\frac{1}{2};\ -1\right)$; 2) $A(-10;\ -11)$; 3) $B(6;\ -11)$; 4) $M(-1{,}5;\ 3{,}5)$; 5) $B(2a-c;\ 2b-d)$; 6) $M(3;\ 6{,}5)$; 7) $M(2t+6;\ 0)$; 8) $B(-1;\ -3)$. **937.** $C(10;\ -7)$, $D(7{,}5;\ -5)$. **938.** a) $\sqrt{106}$; b) 5; c) $10\sqrt{2}$; d) $\sqrt{389}$; e) $11\sqrt{2}$; f) 10. **939.** a) 2; b) 3; c) $\sqrt{13}$. **940.** a) 4; b) 8; c) 5; d) 5. **941.** $\sqrt{82}+2\sqrt{17}+7\sqrt{2}$. **942.** $\sqrt{13}$. **943.** $AC=\sqrt{a^2+h^2}$, $BC=\sqrt{b^2+h^2}$. **944.** a) $C(a+b;\ c)$; b) $AC=\sqrt{b^2+c^2}$, $CO=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. **945.** $AC=\sqrt{(b+d-a)^2+c^2}$, $OC=\sqrt{(b+d)^2+c^2}$. **946.** a) 2; b) 3 arba $-2{,}6$. **947.** a) 13; b) 6. **948.** a) $(0;\ -9)$; b) $(0;\ 5)$. **949.** a) $(-2{,}5;\ 0)$; b) $(8;\ 0)$. **950.** a) $MP=3\sqrt{5}$, $NQ=5$; b) $MP=4\sqrt{2}$, $NQ=2\sqrt{2}$. **951.** Nurodymas.

Reikia įrodyti, kad atkarpos AC ir BD lygios, o jų vidūriai sutampa. a) 8, b) 17. **954.** 100 cm, 100 cm. Nurodymas. Koordinačių sistemą reikia parinkti taip, kaip parodyta 281 paveiksle. **955.** 13 cm. Nurodymas. Koordinančių sistemą reikia parinkti taip, kad trikampio pagrindas būtų ašyje Ox, o aukštinė — ašyje Oy. **956.** Nurodymas. Koordinačių sistemą reikia parinkti taip, kad vienas trapecijos pagrindų būtų ašyje Ox, o jo galai būtų simetriški koordinačių pradžios atžvilgiu. **957.** Nurodymas. Koordinačių sistemą reikia parinkti taip, kaip parodyta 283 paveiksle, ir įrodyti, kad $b=0$. **958.** Nurodymas. Koordinačių sistemą reikia parinkti taip, kad spinduliai AB ir AD būtų teigiamosios pusašės. **960.** a) A ir C; b) B; c) B ir D. **961.** a) C; b) B; c) A ir D. **963.** a) $(-4;\ -3)$, $(-4;\ 3)$; b) $(4;\ 3)$, $(-4;\ 3)$. **964.** a) $(3;\ 0)$, $(3;\ 10)$; b) $(-2;\ 5)$, $(8;\ 5)$. **965.** 1) $x^2+y^2=9$; 2) $x^2+y^2=2$; 3) $x^2+y^2=\frac{25}{4}$. **966.** a) $x^2+(y-5)^2=9$; b) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; c) $(x+3)^2+(y+7)^2=\frac{1}{4}$; d) $(x-4)^2+(y+3)^2=100$. **967.** $x^2+y^2=10$. **968.** $x^2+(y-6)^2=25$. **969.** a) $(x-2)^2+(y-1)^2=41$; b) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. **970.** $(x-5)^2+y^2=25$, $(x+3)^2+y^2=25$; du apskritimai. **971.** $x^2+(y-4)^2=25$. **972.** b) $x+y-7=0$; c) $3x-2y+2=0$. **973.** $7x-y+3=0$. **974.** a) $x-y=0$, $y-1=0$; b) $3x-5y+5=0$. **975.** $(-4;\ 0)$ ir $(0;\ 3)$. **976.** $(3;\ -2)$. **977.** $x=2$ ir $y=5$. **979.** 7. **980.** $5x+2y-10=0$, $5x-2y-10=0$, $5x+2y+10=0$, $5x-2y+10=0$ arba $2x+5y-10=0$, $2x-5y-10=0$, $2x+5y+10=0$, $2x-5y+10=0$. **982.** a) Apskritimas, kurio spindulys 4, centras B; b) apskritimas, kurio spindulys $\frac{1}{3}$, centras D yra atkarpoje BC, $BD=\frac{1}{3}$. **983.** Apskritimas, kurio centras O, spindulys $\sqrt{\frac{k^2-2a^2}{2}}$, kai $k^2>2a^2$; taškas O, kai $k^2=2a^2$ $\left(O\text{ — atkarpos } AB \text{ vidurys, } a=\frac{AB}{2}\right)$. Jei $k^2<2a^2$, tai taškų, tenkinančių uždavinio sąlygą, nėra. **985.** Atkarpos AB' vidurio statmuo; čia B' ir B — taškai, simetriški taško A atžvilgiu. **986.** Tiesė BC. Nurodymas. Stačiakampę koordinačių sistemą reikia parinkti taip, kad taškai A ir D būtų ašyje Ox ir būtų simetriški ašies Oy atžvilgiu. **987.** Tiesė, einanti per rombo įstrižainių susikirtimo tašką ir statmena rombo kraštinei. **988.** a) $x=-\frac{1}{2}$; b) nėra; c) $x=-2$; d) $x=2$. **989.** a) $\{-8;\ -1\}$, $\sqrt{65}$; b) $\{14;\ 4\}$, $2\sqrt{53}$; c) $\{-21;\ 5\}$, $\sqrt{466}$; d) $\{6;\ -18\}$, $6\sqrt{10}$. **990.** a) $\{9;\ -4\}$, $\{7;\ -3\}$, $\{1;\ 21\}$, $\{-4;\ 7\}$; b) 5, 10, $\sqrt{97}$, $\sqrt{58}$. **991.** Nurodymas. Nagrinėkite vektorių $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1;\ 0\}$. Nuo koordinačių pradžios atidėkite vektorių $\overrightarrow{OA}$, lygų $\overrightarrow{M_1M_2}$. Prisiminkite, kad taško A abscisė lygi x_2-x_1. **993.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $AB=BC$. **995.** $(5;\ 0)$. **996.** a) $(-1;\ 9)$, $(0;\ 2)$, $(-4;\ 6)$; b) $5\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$. **998.** 40. **999.** $(0;\ 8)$, arba $(-2;\ 2)$, arba $(-8;\ 0)$; tris spendinius. **1000.** Apskritimai: a), b), d), e). **1001.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. **1002.** a) $\Big(x+$

$+\frac{7}{2}\Big)^2+\Big(y-\frac{5}{2}\Big)^2=\frac{125}{2}$; b) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. **1003.** a) $5x-3y+$ $+16=0$, $x+2y-6=0$, $6x-y+10=0$; b) $3x+5y-4=0$; $2x-y-7=0$, $x+$ $+6y-23=0$; c) $3x+5y-17=0$, $2x-y+6=0$, $x+6y-10=0$. **1006.** 19,5 cm, $\sqrt{261}$ cm, $\frac{\sqrt{2529}}{2}$ cm arba 12,5 cm, $\sqrt{709}$ cm, $\frac{\sqrt{4321}}{2}$ cm. **1008.** Nurodymas. Koordinačių sistemą reikia parinkti taip, kaip parodyta 283 paveiksle. **1009.** Nurodymas. Atkarpos AA_1 tęsinyje reikia atidėti atkarpą A_1A_2, lygią atkarpai AA_1, po to remtis 953 uždaviniu. **1010.** a) Apskritimas, kurio spindulys $2AB$, centras — taškas B', simetriškas taškui B taško A atžvilgiu; b) apskritimas, kurio spindulys $\frac{4}{3}AB$, centras — atkarpos AB taškas C, $AC=\frac{2}{3}AB$.

XI skyrius

1013. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; c) 0. **1014.** a) $\pm\frac{1}{2}$; b) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; c) ±1. **1015.** a) 0; b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) 1; d) $-\frac{3}{4}$. **1016.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1018.** a) $x=y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; b) $x=0$, $y=1{,}5$; c) $x=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $y=2{,}5$; d) $x=-1$, $y=0$; e) $x=\sqrt{3}$, $y=1$. **1019.** a) 45°; b) 90°; c) 150°; d) 135°. **1020.** a) $12\sqrt{6}$ cm²; b) 27 cm²; c) ≈36 cm². **1022.** 16 cm. **1023.** 25 cm². **1024.** a) $\frac{h_b\cdot h_c}{2\sin\alpha}$; b) $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **1025.** a) $\angle C=80°$, $a\approx12{,}3$, $b\approx9{,}1$; b) $\angle B=75°$, $c\approx4{,}5$, $a\approx2{,}3$; c) $\angle B\approx$ $\approx37{,}989°\approx37°59'$, $\angle C\approx62°01'$, $c\approx14$; d) $\angle A=65°$, $b\approx19{,}2$, $c\approx25{,}5$; e) $\angle B\approx37{,}317°\approx37°19'$, $\angle C\approx82°41'$, $c\approx11$; f) $c\approx5{,}7$, $\angle A=\angle B=63°$; g) $a\approx$ $\approx53{,}84$, $\angle B\approx36{,}296°\approx36°18'$, $\angle C\approx56°42'$; h) $\angle A\approx42{,}833°\approx42°50'$, $\angle B\approx$ $\approx60{,}941°\approx60°57'$, $\angle C\approx76°13'$; i) $\angle A\approx54{,}883°\approx54°52'$, $\angle B\approx84{,}270°\approx84°16'$, $\angle C\approx40°52'$. **1026.** $AB\approx15$ cm, $S_{ABC}\approx87$ cm². **1027.** $AC=6$ m, $AB\approx3$ m, $BC\approx$ ≈4 m. **1028.** $\angle BDC\approx39{,}628°\approx39°30'$, $\angle DBC\approx117°52'$. **1029.** $\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$, $\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma}$; čia $\gamma=\frac{\alpha-\beta}{2}$, kai $\alpha\geqslant\beta$, ir $\gamma=\frac{\beta-\alpha}{2}$, kai $\beta>\alpha$. **1030.** $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$, $\cos\gamma=$ $=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$; čia γ — kampas tarp lygiagretainio įstrižainių. **1031.** a) Smailusis; b) statusis; c) bukasis. **1032.** ≈74,2 kg. **1034.** ≈28 cm. **1035.** 60° arba ≈47,112°≈47°07'. **1036.** ≈59 m. **1037.** ≈14,5 m. **1038.** 50 m. **1039.** a) 45°; b) 90°; c) 90°; d) 90°; e) 180°; f) 90°; g) 135°; h) 0°. **1040.** a) 60°; b) 120°; c) 120°; d) 90°; e) 0°; f) 180°. **1041.** a) $3\sqrt{2}$; b) 0; c) $-3\sqrt{2}$.

1042. a) $\frac{1}{2}a^2$; b) $-\frac{1}{2}a^2$; c) 0; d) a^2. **1043.** 13. **1044.** a) $-2{,}5$; b) 0; c) 5. **1047.** a) $x=7{,}5$; b) $x=\frac{2}{3}$; c) $x=0$. **1048.** $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=0$, $\cos C=\frac{4}{5}$. **1049.** $\angle A=60°$, $\angle B\approx 21°47'$, $\angle C\approx 98°13'$. **1050.** $\sqrt{129}$ ir 7. **1051.** 3. **1052.** 13. **1053.** -5. **1057.** $BE=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $AE=\frac{b}{2}\sqrt{3}$, $EC=\frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$, $BC=b\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **1058.** a) $\approx 6{,}254$ m^2; b) $\approx 6\,449\,073$ m^2. **1060.** a) $\angle C=105°$, $AC\approx 6$ cm, $BC\approx 4$ cm; b) $\angle A=75°$, $BC\approx 6$ cm, $AC\approx 4$ cm; c) $\angle C\approx 42°55'$, $\angle B\approx 88°35'$, $AC\approx 4$ cm; d) $\angle A\approx 26°22'$, $\angle C\approx 90°50'$, $AB\approx 11{,}7$ cm. **1061.** a) $BC\approx 12$ cm, $\angle C\approx 17°45'$, $\angle B\approx 27°15'$; b) $AC=\sqrt{5}$ dm, $\angle A\approx 71°34'$, $\angle C\approx 63°26'$; c) $AB\approx 6{,}4$ dm, $\angle A\approx 2°$, $\angle B\approx 28°$. **1062.** $\angle D\approx 117°10'$, $\angle E\approx 38°59'$, $\angle F\approx 23°51'$. **1063.** $\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$. Nurodymas. Reikia taikyti trikampio ploto formulę (96 skyrelis). **1064.** $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$. **1065.** $-\frac{5\sqrt{34}}{34}$. **1066.** 5. **1067.** 15 ir $\approx 10{,}6$. **1068.** $x=40$. **1069.** $36°51'$.

XII skyrius

1078. a) Taip; b) ne. **1079.** b), c). **1081.** a) 60°; b) 108°; c) 120°; d) 144°; e) 160°. **1082.** 360°. **1083.** a) 3; b) 4; c) 8; d) 12. **1084.** a) 6; b) 12; c) 4; d) 10; e) 20; f) 5. **1085.** Nurodymas. Reikia remtis tuo, kad taisyklingojo daugiakampio kiekvienos kraštinės vidurio statmuo eina per apibrėžtinio apskritimo centrą. **1086.** Nurodymas. Reikia remtis tuo, kad taisyklingojo daugiakampio kiekvieno kampo pusiaukampinė eina per įbrėžtinio apskritimo centrą. **1087.** 1) $R=3\sqrt{2}$, $r=3$, $P=24$, $S=36$; 2) $R=2\sqrt{2}$, $a_4=4$, $P=16$, $S=16$; 3) $r=2\sqrt{2}$, $a_4=4\sqrt{2}$, $P=16\sqrt{2}$, $S=32$; 4) $R=3{,}5\sqrt{2}$, $r=3{,}5$, $a_4=7$, $S=49$; 5) $R=2\sqrt{2}$, $r=2$, $a_4=4$, $P=16$. **1088.** 1) $r=1{,}5$, $a_3=3\sqrt{3}$, $P=9\sqrt{3}$, $S=\frac{27\sqrt{3}}{4}$; 2) $R=\frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $r=\frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $a_3=2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, $P=6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$; 3) $R=4$, $a_3=4\sqrt{3}$, $P=12\sqrt{3}$, $S=12\sqrt{3}$; 4) $R=\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{5\sqrt{3}}{6}$, $P=15$, $S=\frac{25\sqrt{3}}{4}$; 5) $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3=2$, $S=\sqrt{3}$. **1089.** $2\sqrt{6}$ cm. **1090.** $2\sqrt{3}$ cm. **1091.** 6 cm. **1092.** $32\sqrt{3}$ cm. **1094.** a) 36 cm^2; b) $16\sqrt{3}$ cm^2; c) $162\sqrt{3}$ cm^2; d) $\approx 248{,}52$ cm^2. **1095.** $\frac{9\sqrt{3}}{3}$ cm^2. **1096.** $S_3:S_4:S_6=\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **1097.** $3:4$. **1098.** a) $2\sqrt{3}\,r$, $6\sqrt{3}\,r$, $3\sqrt{3}\,r^2$; b) $\sqrt{3}R$, $3\sqrt{3}R$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. **1099.** $\sqrt{2}R^2$. **1100.** c), d). Nurodymas. Reikia remtis 109 skyrelio 2 uždaviniu. **1101.** 1) 25,12; 2) 18,84; 3) 13,06; 4) 9; 5) 4,40; 6) 1; 7) 637,42; 8) 14,65; 9) 0,45. **1102.** a) Padidės tris kartus; b) sumažės

du kartus; c) padidės k kartų; d) sumažės k kartų. **1103.** a) Padidės k kartų; b) sumažės k kartų. **1104.** a) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$; b) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; c) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$;

d) $\frac{\pi a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; e) 8π. **1105.** a) πa; b) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; c) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$;

d) $\frac{2\pi h\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$. **1106.** 1,5 m. **1107.** $\approx 12\,739$ km. **1108.** $\approx 42\,013$ km.

1109. a) π cm; b) $\frac{3}{2}\pi$ cm; c) 2π cm; d) 3π cm. **1110.** 30. **1111.** $\approx 59{,}2$ cm.

1112. $\approx 36{,}2$ cm. **1113.** $\approx 4°35'$. **1114.** 1) 12,56; 2) 78,5; 3) 1,69; 4) 0,26; 5) 7; 6) 9258,26; 7) 9,42; 8) 1,41. **1115.** a) Padidės k^2 kartų; b) sumažės k^2 kartų.

1116. a) $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4}$; b) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$; c) $\frac{\pi(a^2+4h^2)^2}{64h^2}$. **1117.** a) $\frac{\pi a^2}{12}$;

b) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha+1)^2}$; c) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$; d) $\frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **1118.** $\approx 34{,}2$ m^2.

1119. $D\approx 13{,}06$ m, $S\approx 133{,}84$ m^2. **1120.** 4π cm^2. **1121.** 0,75 mm. **1122.** $5{,}6\pi$ dm$^3\approx$ $\approx 17{,}6$ dm^3. **1123.** $r^2(\pi-2)$. **1124.** Mažiausio skritulio plotas lygus π, o žiedų plotai lygūs 3π, 5π, 7π. **1126.** ≈ 262 cm^2. **1127.** $\sqrt{\frac{5S}{\pi}}$. **1128.** $\frac{4-\pi}{4}a^2$.

1129. a) 20; b) 9; c) 5; d) 6. **1130.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ dm. **1131.** 6,72 cm. **1132.** a) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$;

b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **1135.** 6 cm; $54\sqrt{3}$ cm^2. **1137.** 330 km. **1138.** a) $\approx 15{,}1$ cm; b) $\pi a\sin\alpha$. **1139.** $\approx 4{,}4$ km. **1141.** N u r o d y m a s. Sakykime, $ABCDEFGH$ — ieškomasis aštuonkampis, O — apibrėžtinio apskritimo centras. Iš pradžių reikia nubraižyti lygiašonį trikampį ABO. **1142.** N u r o d y m a s. Reikia taikyti Pitagoro teoremą. **1143.** N u r o d y m a s. Iš pradžių į apskritimą reikia įbrėžti taisyklingąjį trikampį ir taisyklingąjį šešiakampį.

XIII skyrius

1151. N u r o d y m a s. Reikia įrodyti prieštaros metodu. **1154.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 115 skyrelio teorema. **1155.** N u r o d y m a s. Reikia įrodyti prieštaros metodu (žr. 115 skyrelio teoremos įrodymą). **1157.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 1156 ir 1051 uždaviniu. **1158.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia rasti tiesės b kurių nors dviejų taškų vaizdus. **1159.** F — keturkampis. **1160.** N u r o d y m a s. Uždavinys sprendžiamas panašiai kaip 1158 uždavinys. **1161.** F — trikampis. **1172.** N u r o d y m a s. Sakykime, M — bet kuris tiesės AB taškas, M' — jo vaizdas. Remiantis lygybėmis $AM=AM'$, $BM=BM'$ reikia įrodyti, kad taškai M ir M' sutampa. **1173.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 1155 uždaviniu. **1174.** a) N u r o d y m a s. Reikia remtis 1157 uždaviniu. **1175.** N u r o d y m a s. Reikia pasinaudoti simetrija tiesės a atžvilgiu. **1176.** N u r o d y m a s. Reikia pasinaudoti taškais D_1 ir D_2, simetriškais taškui D tiesių AB ir BC atžvilgiu. **1178.** N u r o d y m a s. Reikia pasinaudoti ly-

giagrečiuoju postūmiu per vektorių $\overrightarrow{AD}$. **1179.** N u r o d y m a s. Reikia atsižvelgti į tai, kad trikampio, į kurį lygiagretusis postūmis per vektorių $\overrightarrow{BC}$ atvaizduoja trikampį ABS, aukštinės susikerta viename taške. **1180.** N u r o d y m a s. Reikia pasinaudoti posūkiu apie tašką O 120° kampu. **1181.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubrėžti tiesę, simetrišką vienai duotų tiesių taško O atžvilgiu. **1182.** N u r o d y m a s. Sakykime, $ABCD$ — ieškomoji trapecija, kurios pagrindai AD ir BC. Iš pradžių reikia nubraižyti trikampį ACD_1; čia D_1 — taškas, į kurį tašką D atvaizduoja lygiagretusis postūmis per vektorių $\overrightarrow{BC}$.

Sunkesni uždaviniai

1184. N u r o d y m a s. Reikia rasti įstrižainių AC ir BD vidurio taškų koordinates. **1185.** N u r o d y m a s. Reikia remtis tuo, kad vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ atitinkamų koordinačių santykis lygus λ. **1186.** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. N u r o d y m a s. Reikia remtis 1185 uždaviniu. **1187.** $D\left(\frac{15}{11};\ \frac{24}{11}\right)$. N u r o d y m a s. Reikia remtis 535 ir 1185 uždaviniu. **1188.** $3\sqrt{5}$ cm. N u r o d y m a s. Tieses AM ir BN reikia laikyti koordinačių ašimis. **1189.** $\left(\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3};\ \frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$. **1190.** a) $M\left(2\frac{3}{4};\ 0\right)$; b) $M(2;\ 0)$. N u r o d y m a s. Reikia remtis štai kuo: jei du taškai yra abscisių ašies skirtingose pusėse, tai ieškomasis taškas yra atkarpos, kurios galai — tie taškai, ir abscisių ašies susikirtimo taškas. **1191.** N u r o d y m a s. a) Sakykime, L — kreivė, kurią nusako duota lygtis, $M_0(x_0;\ y_0)$ — jos kuris nors taškas. Reikia parašyti atkarpos M_1M_2 (čia $M_1(x_0-A;\ y_0-B)$; $M_2(x_0+A;\ y_0+B)$) vidurio statmens lygtį ir įsitikinti, kad ji ir duota lygtis yra vienodos. b) Reikia atsižvelgti į tai, kad jokio apskritimo lygtis neturi kxy pavidalo nario; k — kuris nors skaičius, $k\neq 0$. **1192.** $(1;\ 0)$, $(-0{,}6;\ 0{,}8)$, $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **1193.** a) Apskritimas, taškas arba tuščioji aibė. b) Tiesė, plokštuma arba tuščioji aibė. N u r o d y m a s. Reikia sudaryti ieškomos taškų aibės lygtį. **1194.** Apskritimas be vieno taško. N u r o d y m a s. Reikia sudaryti ieškomos taškų aibės lygtį; koordinačių sistemą reikia parinkti taip, kad tiesė a sutaptų su viena koordinačių ašimi, o taškas A būtų kitoje ašyje. **1195.** Apskritimas, kurio spindulys kR; R — duoto apskritimo spindulys. N u r o d y m a s. Reikia parinkti koordinačių sistemą, kurios pradžia — taškas O, ir sudaryti ieškomos aibės lygtį. **1196.** b) N u r o d y m a s. Reikia remtis Pitagoro teoremai atvirkštine teorema. **1197.** N u r o d y m a s. Tarus, kad $MN=a$, iš pradžių reikia rasti trikampio AMB plotą bei kraštines AM ir BM. **1198.** N u r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad kiekvieno iškilojo keturkampio atveju teisinga lygybė $S_{ODC}\cdot S_{OAB}=S_{OBC}\cdot S_{OAD}$ (O — įstrižainių susikirtimo taškas). **1199.** N u r o d y m a s. Iš pradžių teiginį reikia įrodyti iškilojo keturkampio atveju. Tam reikia nubrėžti įstrižainę, jungiančią kraštinių a ir d bendrą galą su kraštinių b ir c bendru galu, po to rasti gautų trikampių plotus. **1200.** N u r o d y m a s.

Reikia remtis tuo, kad $S_{ABC}=S_{AA_1C}+S_{AA_1B}$. **1201.** $\sqrt{\frac{a^2bc+d^2bc+b^2ad+c^2ad}{ad+bc}}$

$\sqrt{\frac{c^2ab+d^2ab+a^2dc+b^2dc}{ad+dc}}$; čia a, b, c, d — įbrėžtinio keturkampio kraštinės. **1202.** Nurodymas. Remiantis kosinusų teorema reikia įrodyti, kad kampo, esančio tarp kraštinių a ir b, sinusas lygus $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$; čia p — pusperimetris. **1203.** Nurodymas. Iš pradžių reikia įrodyti, kad tiesė, einanti per įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrus, vienai pusiaukampinių statmena tada ir tik tada, kai įbrėžtinis apskritimas vieną trikampio kraštinę liečia taške, vienodai nutolusiame nuo tos kraštinės vidurio ir į tą kraštinę nuleistos aukštinės pagrindo. **1204.** $72\sin\alpha\cos^3\alpha$. **1205.** $2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$. **1206.** $\frac{l^2-h^2}{2h}$. **1207.** Nurodymas. Iš pradžių reikia rasti ir palyginti kampus BAC bei AOB. **1208.** Nurodymas. Reikia remtis 1207 uždaviniu. **1209.** Nurodymas. Sakykime, M — atkarpos A_1A_4 vidurys. Reikia įrodyti, kad trikampis ACM lygiašonis, ir, tuo remiantis, įsitikinti, kad apie penkiakampį apibrėžto apskritimo centras sutampa su į trikampį ACM įbrėžto apskritimo centru. **1210.** Nurodymas. Reikia remtis 1208 uždaviniu. **1211.** Nurodymas. Reikia remtis 1210 uždaviniu. **1212.** Nurodymas. Reikia remtis 1211 uždaviniu. **1213.** Nurodymas. Tašką M atkarpomis reikia sujungti su daugiakampio viršūnėmis ir daugiakampio plotą parašyti kaip gautų trikampių plotų sumą. **1214.** Nurodymas. Reikia remtis 895 uždaviniu. **1219.** Nurodymas. Reikia remtis 1156 uždaviniu. **1220.** Nurodymas. Reikia nubraižyti lygius lygiašonius trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių kampai A ir A_1 statieji, ir remtis 1156 uždaviniu. **1222.** Nurodymas. Sakykime, $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ — duotos trapecijos, kurių didesnieji pagrindai AB ir A_1B_1. Spinduliuose AB ir A_1B_1 reikia atidėti atkarpas $AE=DC$ ir $A_1E_1=D_1C_1$, po to trikampiams BCE ir $B_1C_1E_1$ taikyti 1156 uždavinio teiginį. **1223.** Nurodymas. Sakykime, ABC ir $A_1B_1C_1$ — duoti trikampiai, $AB=A_1B_1$, $AC=$ $=A_1C_1$, $\angle B-\angle C=\angle B_1-\angle C_1$. Reikia išnagrinėti ašines simetrijas tiesių, kuriose yra duotų trikampių aukštinės AH ir A_1H_1, atžvilgiu. **1224.** Nurodymas. Reikia pasinaudoti centrine simetrija vieno lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taško atžvilgiu. **1225.** Nurodymas. Reikia pasinaudoti ašine simetrija duotos tiesės atžvilgiu. **1226.** Nurodymas. Kai taškas M yra kraštinėje OB, iš pradžių reikia nubrėžti tiesę, simetrišką tiesei AO taško M atžvilgiu. **1228.** Nurodymas. Sakykime, O — ieškomo trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas, O_1 — taškas, simetriškas taškui O kraštinės AC vidurio atžvilgiu. Iš pradžių reikia nubraižyti $\triangle AOO_1$. **1229.** Nurodymas. Sakykime, $ABCD$ — ieškomoji trapecija, AB ir CD — jos pagrindai. Reikia pasinaudoti lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\overrightarrow{AB}$. **1230.** Nurodymas. Reikia pasinaudoti lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\overrightarrow{AB}$. **1231.** Nurodymas. Reikia pasinaudoti posūkiu apie tašką A 90° kampu.

DALYKINĖ RODYKLĖ

TURINYS

VIII skyrius. **Apskritimas**

IX skyrius. **Vektoriai**

Levonas **Atanasianas**, Valentinas **Butuzovas**, Sergejus **Kadomcevas**, Eduardas **Pozniakas**, Irina **Judina**
GEOMETRIJA
Vadovėlis VII—IX klasei

Redaktorė *N. Ramanauskienė*
Viršelis *G. Pempės*

SL 259. 1995 12 12. 18,67+0,42 priešl. leidyb. apsk. l.
Tir. 21 000 egz. Leid. Nr. 13125. Užsak. Nr. 5283.
Akcinė bendrovė leidykla „Šviesa", Vytauto pr. 25, 3000 Kaunas.
Valstybinė „Aušros" spaustuvė, Vytauto pr. 23, 3000 Kaunas.
Sutartinė kaina

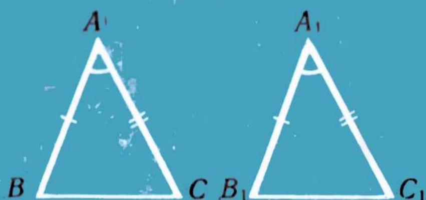
VADOVĖLIO KORTELĖ

Eil. Nr.	Mokinio vardas ir pavardė	Mokslo metai	Vadovėlio išvaizda (labai gera, gera, patenkinama)	
			mokslo metų pradžioje	mokslo metų pabaigoje

GERBKITE IR TAUSOKITE VADOVĖLIUS!

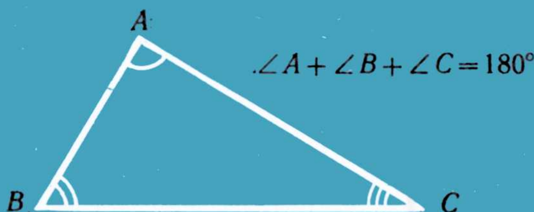
Trikampių lygumo požymiai

Pirmasis požymis



Jei $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$,
tai $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

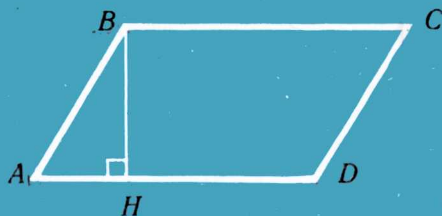
Trikampio kampų suma



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Plotai

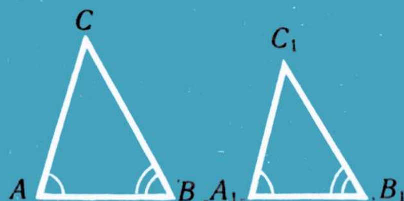
Lygiagretainio



$S = AD \cdot BH$

Trikampių panašumo požymiai

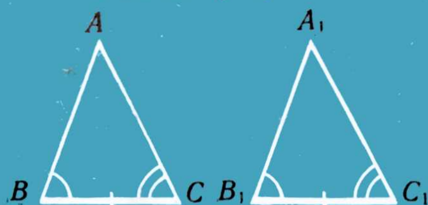
Pirmasis požymis



Jei $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

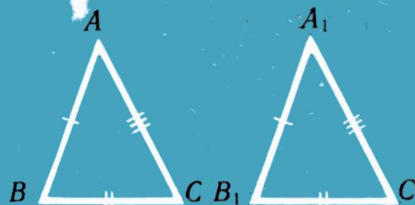
tai $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Antrasis požymis



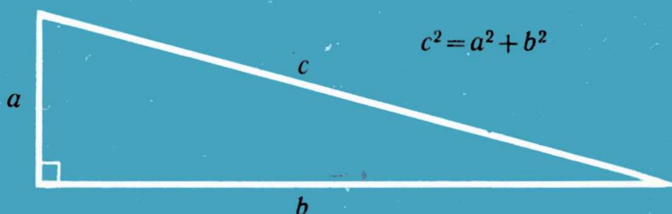
Jei $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,
tai $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Trečiasis požymis



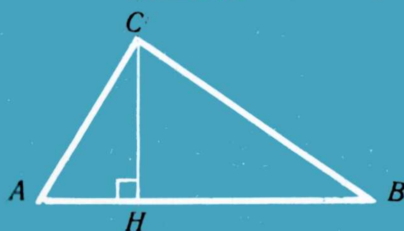
Jei $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$
tai $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Pitagoro teorema



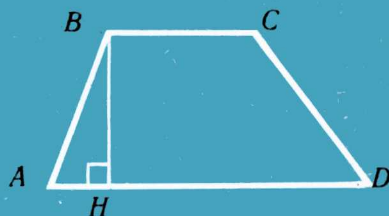
$c^2 = a^2 + b^2$

Trikampio



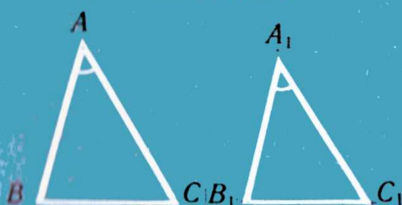
$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

Trapecijos



$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$

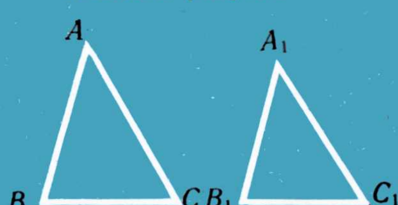
Antrasis požymis



Jei $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,

tai $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Trečiasis požymis



Jei $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,

tai $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Stačiojo trikampio kraštinių ir kampų prieklausos

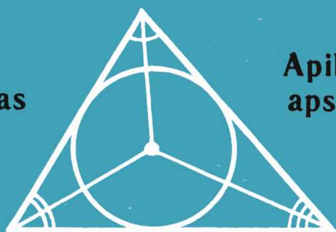


$\sin A = \frac{BC}{AB}$

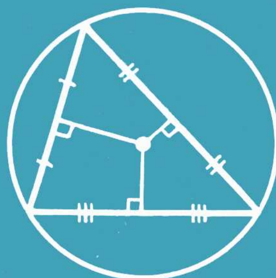
$\cos A = \frac{AC}{AB}$

$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$

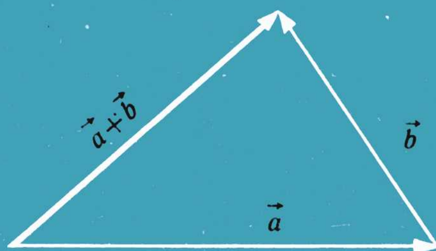
Įbrėžtinis apskritimas



Apibrėžtinis apskritimas

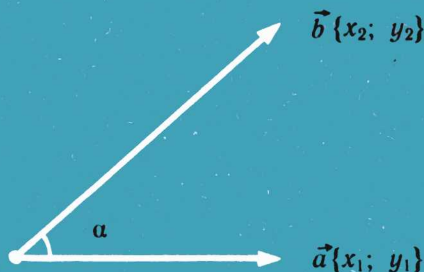


Dviejų vektorių sudėtis

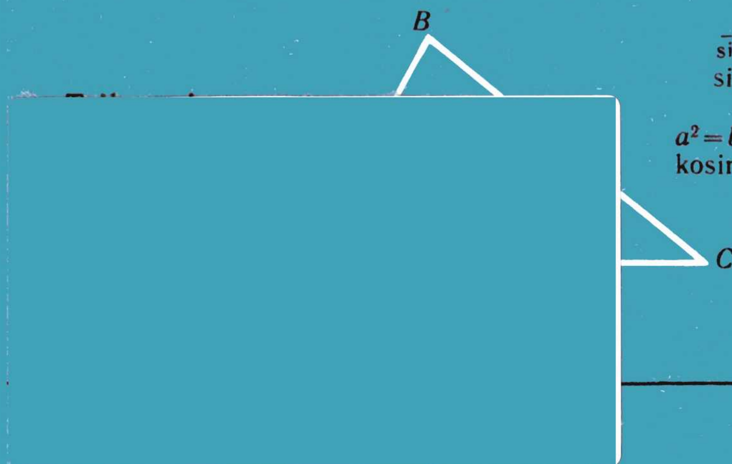


Trikampio taisyklė

Vektorių skaliarinė sandauga



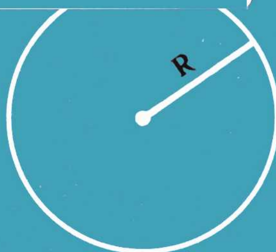
$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha = x_1x_2 + y_1y_2$$



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ — sinusų teorema

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ — kosinusų teorema

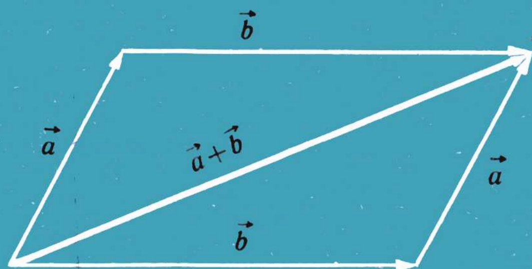
Apskritimo ilgis



Skritulio plotas

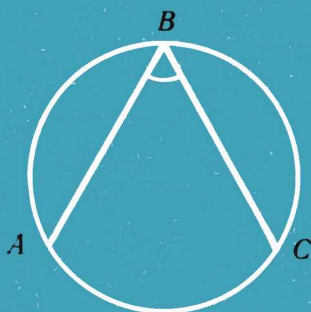
$C = 2\pi R$

$S = \pi R^2$



Lygiagretainio taisyklė

Įbrėžtinio kampo teorema



$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$